



高校1年生から始める高校物理 力学編

※ 注

- ・ 各地域の公立高校の入試問題に
対して 90% 以上の得点で満点と
視聴者として想定しています。
- ・ 物理を勉強するのに必要な数学は
全て動画内で説明します。
- ・ 大学入試用の物理ではないので、
この動画だけでは演習不足になります。
演習は各自でお願いします。
問題演習に適した参考書は
動画説明欄のリンク先で紹介しています。
- ・ この動画だけで「全て」が理解でき
るわけではありません。当たり前ですけど。。

- ・ 長尺動画なので間違ってもリ
ロード後は見つかるかもしれません。
コメント欄に質問・指摘の
いたっては視聴者様同様に
できるだけ解決していただきます。
続きの動画を作るのに時間を
使えます。何とぞ“協力”を。
- ・ 注意事項は必ず読んでください。
動画説明欄に追加していきますので
こちらも“確認”してください。

目次

<目標1>

- * コンテナー・マシンの計算
- * $(x+y)^n$ の公式
- * 関数の名前
- * 極限の記号
- * 定義に従って微分
- * $\ln$ 乗の微分
- * 微分の線形性
- 単純化, 理想化
- 質点とは
- 位置, 速度, 加速度 1

<目標2>

- * 不定積分
- * 積分の線形性
- * 定積分の計算
- * 定積分の例
- 位置, 速度, 加速度 2
- 運動方程式
- * 2次関数の補習
- 相対位置, 相対速度, 相対加速度 1

<目標3>

- ・円方程式
- ・弧度法
- ・三角関数
- ・ベクトルとは
- ・ベクトルの合成と分解
- ・力のつり合い
- ・力の種類

<目標4>

- ・ベクトルの成分表示
- ・ベクトルの時間微分・積分
- ・ベクトル表示の運動方程式
- ・作用・反作用の法則

・力積と運動量

・質点と壁の衝突 (1次元運動)

・2物体間、運動量の保存

<目標5>

・関数とは?

・逆関数

・合成関数

・置換積分

・合成関数の微分

・1次元上、質点の運動エネルギー

・位置エネルギー

・ベクトルの内積

・3次元の力学的エネルギー

・保存力 & 非保存力

<目標6>

- * π と e の乗 = 分数乗、指数
- * 指数の微分・積分
- * 積 = 商、形を工夫した関数の微分
- * 三角関数の加法定理・和積の公式
- * 三角関数の極限
- * 三角関数の微分・積分
- * 2階の微分方程式
- * 三角関数のグラフ
- 単振動

<目標7>

- * 媒介変数表示 = 軌跡
- 等速円運動
- 非等速円運動

<目標8>

- * ベクトルの外積
- * 内積と外積の時間微分
- 質点の角運動量
- 回転の運動方程式
- 万有引力
- ケプラー第2法則

<目標 9>

- 万有引力、位置エネルギー
- × 円、基本
- × 双曲線、基本
- × 離心率 = 2次曲線
- × 極座標表示
- × 極座標表示、図形の方程式
- 極座標表示での運動方程式
- ニュートン 第1法則
- × 円、面積
- ニュートン 第3法則

<目標 10>

- × 余弦定理
- 球対称、質量分布、物質から万有引力

<目標 11>

- 剛体、つり合い
- 重心

<目標 12>

- 慣性力
- 束縛条件
- 重心運動 + 相対運動

力学を勉強するとわかること

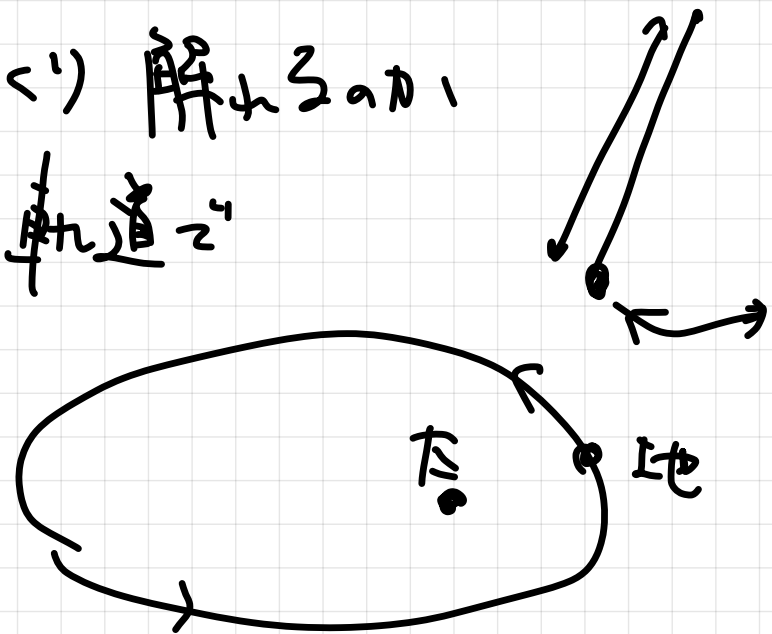
- 物を投げたときなぜ「放物線」を描くのか。



- カーリングのストーンがぶつかるとき、後の運動はどう変わるか。

- ふりこはなぜ長い方がゆくり解かるのか。

- 太陽のまわりを地球が「どのような軌道」に回っているのか。



・ 力学に必要な数学 OK.

⇒ 他の分野で 必要な数学をほとんど網羅.

電磁気学, 熱力学, 波動, 原子.

・ 大学受験

(例) 東大

物理 60点満点

20 力学

20 電磁気学

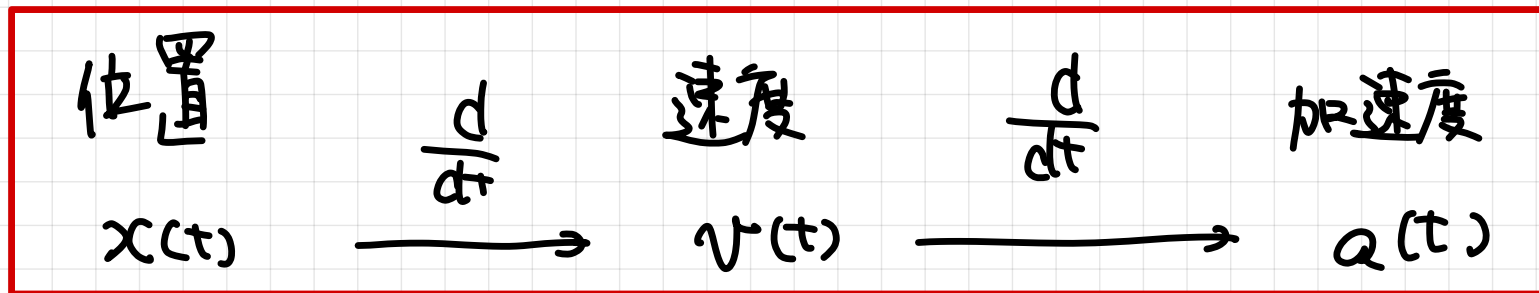
20 その他.

理系だと $\frac{20}{440} \approx 5\%$

国、数、英、物、化 のうち 5%

たと割合が大きい
大学も多い.

< 目標 1. >



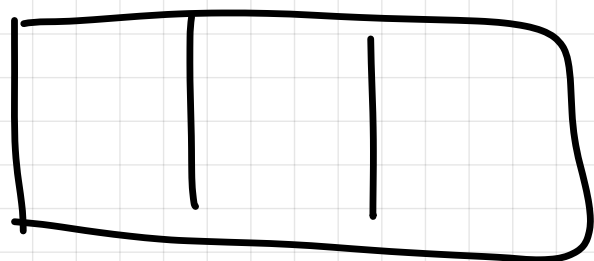
* 微分の基礎 または 最短ルート問題

* 1次元上の質点の運動

コンビネーションの計算

トランプのスペード 13 枚から 3 枚えらぶ。
えらび方は何通り？

(i) 3 枚作って 5 には入る。



↑ ↑ ↑
13 × 12 × 11 通り

(ii) 繰り返しをカウント。

$\boxed{1|2|3}$ $\boxed{2|1|3}$ は同じ。

1 と 2 と 3 枚 来る。

$3 \times 2 \times 1$ 通り の 並べ方がある。

→ 全部 24 通り分 来る。

$$\Rightarrow \frac{13 \times 12 \times 11}{3 \times 2 \times 1} \quad \text{が正解。}$$

① ~ ⑮ までのカードから 4 枚えらぶ。
えらび方は何通り？

$$\frac{15 \times 14 \times 13 \times 12}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

x 種類 n 個 y 枚 $n \geq y$ 不等
 $n \geq y$ は? $(x \geq y)$

$$x \geq y$$

$$x \geq y$$

同意味

$x \geq y$ 以上
 y 以上含む

$x > y$
 含まない

$$x < y$$

$$x \leq y$$

$$\frac{x \times (x-1) \times (x-2) \times \dots \times (x-y+2) (x-y+1)}{y \times (y-1) \times \dots \times 2 \times 1}$$

$\uparrow$ $x \geq y$ と書く
 (コンビネーション C)

記号 の定義

定義は言葉や記号の意味
 定義は受け取る側にある
 疑問を解消する

* $\uparrow$ なる x
 $\uparrow$ 書く x ?
 $\rightarrow$ $\uparrow$ $\downarrow$ $\rightarrow$ $\uparrow$ $\downarrow$

$$x C_y = \frac{x \times (x-1) \times \dots \times (x-y+2) (x-y+1)}{y \times (y-1) \times \dots \times 2 \times 1}$$

階乘、記号を定義

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$100! = 100 \times 99 \times \cdots \times 2 \times 1$$

$${}_xC_y = \frac{x \times (x-1) \times \cdots \times (x-y+2)(x-y+1)}{y \times (y-1) \times \cdots \times 2 \times 1}$$

$$= \frac{x \times (x-1) \times \cdots \times (x-y+1) \times (x-y)!}{y! \times (x-y)!}$$

$$= \frac{x!}{y! (x-y)!}$$

< 演習 >

$$(1) {}_5C_3$$

$$(2) {}_5C_2$$

$$(3) {}_{15}C_3$$

$$(4) {}_{15}C_{12}$$

$$(5) {}_xC_y = {}_xC_{x-y}$$

$$(1) {}_5C_3 = \frac{5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 10$$

$$(2) {}_5C_2 = \frac{5 \cdot \cancel{4}}{\cancel{2} \cdot 1} = 10$$

$$(3) {}_{15}C_3 = \frac{\cancel{15} \cdot \cancel{14} \cdot \cancel{13}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 455$$

$$(4) {}_{15}C_{12} = \frac{\cancel{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}}{\cancel{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}} = 455$$

$$(5) {}_xC_{x-y} = \frac{x!}{x! \times \{x - (x-y)\}!} = \frac{x!}{(x-y)! \cdot y!} = {}_xC_y$$

$(x+y)^n$ の公式

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= (x+y)(x+y) \\ &= x^2 + yx + xy + y^2 \\ &= x^2 + 2xy + y^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= (x^2 + 2xy + y^2)(x+y) \\ &= x^3 + 2x^2y + y^2x \\ &\quad + x^2y + 2xy^2 + y^3 \\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \underbrace{(x+y)^{\textcircled{1}}(x+y)^{\textcircled{2}} \cdots (x+y)^{\textcircled{n-1}}(x+y)^{\textcircled{n}}}_{n \text{ 個}}\end{aligned}$$

----- $x^a y^{n-a}$ の係数

① ~ ④ の中から a 個 x を選ぶ
 y の数は自動的に決まる
 → どのようにして何通りか?

$n C a \Leftarrow$ 係数

$$(x+y)^n$$

2項定理

$$= {}_nC_0 x^n y^0 + {}_nC_1 x^{n-1} y^1 + {}_nC_2 x^{n-2} y^2 + \dots + {}_nC_{n-1} x^1 y^{n-1} + {}_nC_n x^0 y^n$$

* $y^0 = x^0 = 1$ と「0乗」1になるのは「1乗」も同様

$$\begin{aligned} {}_nC_0 &= \frac{n!}{0!(n-0)!} \\ &= 1 \end{aligned}$$

($0! = 1$ と決まっている.)

$${}_nC_1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$$

$${}_nC_2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\begin{aligned} &= x^n + n x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} y^2 \\ &\quad + \dots + n x y^{n-1} + y^n \end{aligned}$$

< 演習 >

$$(1) (x-2y)^4$$

$$4C_2 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$$

$$(2) 2^n = nC_n + nC_{n-1} + \dots + nC_2 + nC_1 + nC_0$$

$$\begin{aligned}(1) (x-2y)^4 &= 4C_0 x^4 (-2y)^0 + 4C_1 x^3 (-2y)^1 + 4C_2 x^2 (-2y)^2 + 4C_3 x^1 (-2y)^3 + 4C_4 x^0 (-2y)^4 \\&= x^4 + 4 \cdot x^3 (-2y) + 6x^2 \cdot 4y^2 + 4 \cdot x \cdot (-8y^3) + 16y^4 \\&= x^4 - 8x^3y + 24x^2y^2 - 32xy^3 + 16y^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) 2^n &= (1+1)^n \\&= nC_0 \cdot 1^n \cdot 1^0 + nC_1 \cdot 1^{n-1} \cdot 1^1 + \dots + nC_{n-1} \cdot 1^1 \cdot 1^{n-1} + nC_n \cdot 1^0 \cdot 1^n \\&= nC_0 + nC_1 + \dots + nC_{n-1} + nC_n\end{aligned}$$

* 3乗の二項定理は、 $(x+y)^3$ の展開式を導く。

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= {}_3C_0 \cdot x^3 y^0 + {}_3C_1 x^2 y^1 + {}_3C_2 x^1 y^2 + {}_3C_3 x^0 y^3 \\ &= x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + y^3\end{aligned}$$

$${}_3C_1 = \frac{3}{1} = 3$$

関数名

$$f(x) = x^2 + x + 3$$

↑
関数名
↑
変数
3は定数

$$f(2) = 2^2 + 2 + 3 = 9$$

$$f(-1) = 1 - 1 + 3 = 3$$

$$g(a) = a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4}$$

$$a=3 \text{ とする}$$

$$g(3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$$

$$3^4 + 3^3 + 3^2 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$$

$$2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$

< 演習 >

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 5x \\ g(a) = ax^2 + a^2x + a^3 \end{cases}$$

(1) $f(2)$

(2) $f(y)$

(3) $g(2)$

(4) $g(x)$ $\neq x^2 + 5x$

(1) $f(2) = 2^2 + 5 \cdot 2 = 14$

(2) $f(y) = y^2 + 5y$

(3) $g(2) = 2x^2 + 4x + 8$

* g の変数は x であらう
 a は定数に注意!!

(4) $g(x) = x^3 + x^3 + x^3 = 3x^3$

極限の記号

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t) = f(a)$$

基本はこの形。

t=a 不定形に注意

$$\hookrightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t} = \frac{0}{0} ?$$

$$\hookrightarrow = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{1} = 1$$

ここで約分(たまたま)かな、
という意識を持つ。

* 細かいことは 数学Ⅱで“学ぶ”です
Ⅳ

<演習>

$$(1) \lim_{t \rightarrow 0} (5t - 2)$$

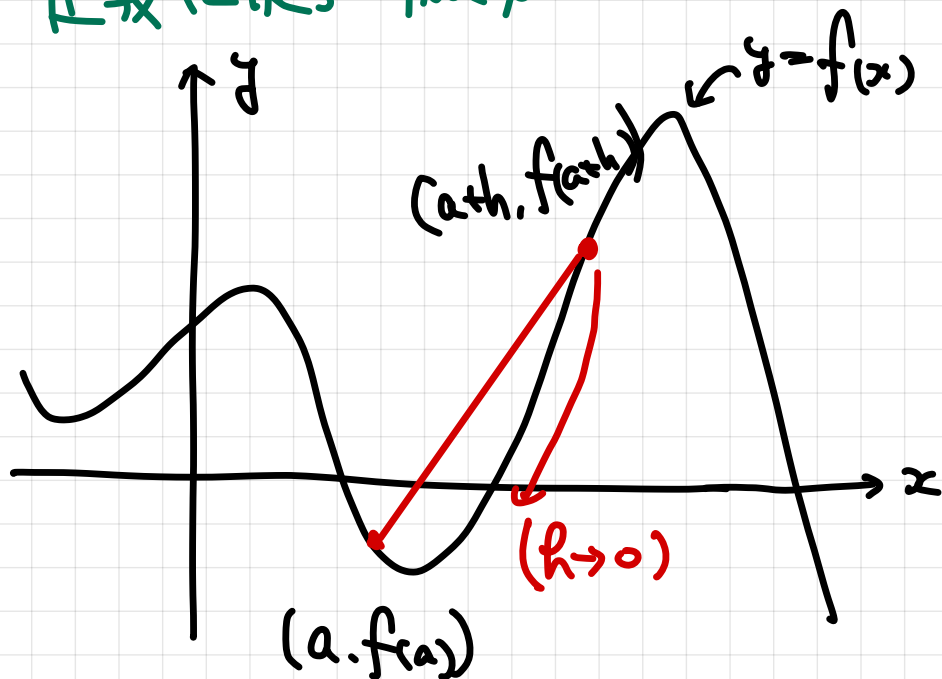
$$(2) \lim_{t \rightarrow 5} \frac{t^2 - 4t - 5}{t - 5}$$

$$(1) \lim_{t \rightarrow 0} (5t - 2) = 5 \cdot 0 - 2 = -2$$

$$(2) \lim_{t \rightarrow 5} \frac{t^2 - 4t - 5}{t - 5}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 5} \frac{\cancel{t-5}(t+1)}{\cancel{t-5}} = 6$$

定義に従って微分



$$\begin{aligned} \text{平均変化率} &= \frac{f(a+h) - f(a)}{a+h - a} \\ &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=a}$$

微分係数

↑
= 傾きに書く。

$\frac{d}{dx}$ の記号
x での微分係数、という記号

$\left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=a}$ $x=a$ での微分係数、という記号。

$x=a$ 1.2.3 の一般の x について
傾きを知らずに Δx がある

↓

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{d}{dx} f(x)$$

よって導関数と(1)。

< 演習 >

$$\frac{d}{dx} f(x) = \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=2} \text{ である。}$$

$$(1) f(x) = 3x+5$$

$$(2) f(x) = x^3+x$$

$$\begin{aligned} (1) \frac{d}{dx} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{3(x+h)+5\} - (3x+5)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3\cancel{h}}{\cancel{h}} = 3 \end{aligned}$$

$$\left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=2} = 3$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(x+h)^3 + (x+h)\} - (x^3 + x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2\cancel{h} + 3x\cancel{h} + \cancel{h}^3 + \cancel{h}}{\cancel{h}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2 + 1) = 3x^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=2} = 3 \cdot 2^2 + 1 = 13$$

* 1 変数関数のときは.

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x) \quad : \quad \text{導関数}$$

$$\left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=a} = f'(a) \quad : \quad \text{微分係数}$$

$$x = \frac{a}{b} < x < \frac{c}{d}$$

n 乗の微分

$$\frac{d}{dx} x^n = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots}_{h^2 \times (\quad) \text{ 以降は } h^2 \text{ 以上}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ nx^{n-1}h + \underbrace{h^2 \times (\quad)}_{\rightarrow 0} \right\} = nx^{n-1}$$

↑
前より下へ走って。
 $n \rightarrow (n-1)$
次数が"下"る。

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

微分、線形性

$i(x) = f(x) + g(x)$ の微分を考えよう。

足し算の形になっている

場合は

各項 = "これは微分可能な..."

$$\frac{d}{dx} i(x) = \frac{d}{dx} (f(x) + g(x))$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x+h) + g(x+h)\} - \{f(x) + g(x)\}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\}$$

$$= \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} g(x)$$

<演習>

$\frac{d}{dx} f(x)$ を求めよ。

$$(1) \quad f(x) = 3x^2 - 5x$$

$$(2) \quad f(x) = x^3 - 2x + 4.$$

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{d}{dx} f(x) &= 3 \cdot 2 \cdot x^1 - 5 \cdot 1 \cdot x^0 \\ &= 6x - 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \frac{d}{dx} f(x) &= 3 \cdot x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x^0 + 4 \cdot 0 \\ &= 3x^2 - 2 \end{aligned}$$

ここまでで 数学Ⅱで

習う微分の簡単な計算
ができるようになる。

*

このレベルの微分の計算は
「九九」レベルだとい
う認識が必要

単純化, 理想化

物理ではよく単純化, 理想化という操作をする。

(例) 摩擦を無視する

空気抵抗を

物体の体積を

理想的 : 数式やデータで記述される状態や状況

単純化 : 記述される理想的な状況をセティングすること。

質点とは

定義:

質点は体積がゼロで、

質量がゼロではなく、

速度と位置が同時に観測可能な物体。

体積 $\rightarrow$ 宇宙空間上の地球と太陽
試験管の中の気体分子

量子力学では粒子の「速度」と「位置」に同時に観測できない

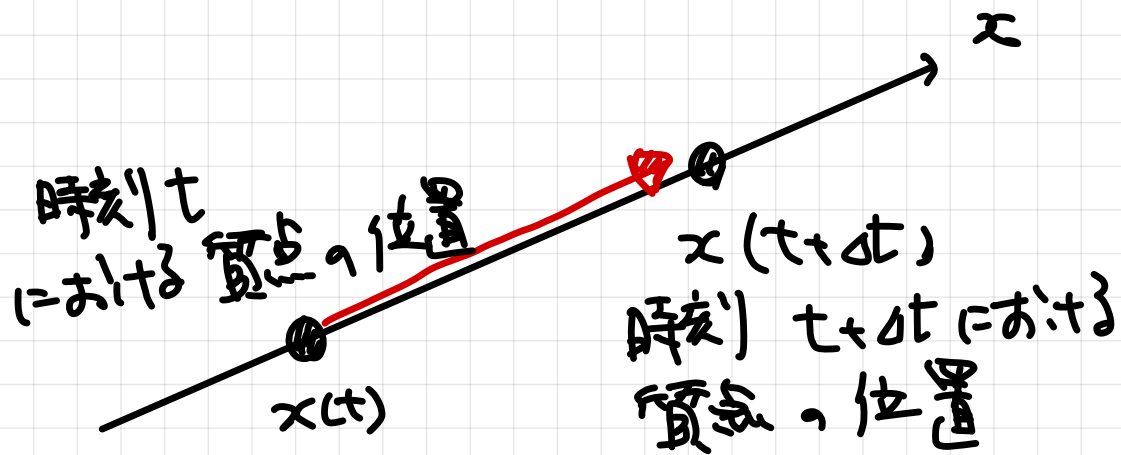
==

↑

大学レベルの話

位置、速度、加速度 1

1次元上 (直線上) を運動する
質点を考える。



平均の速度は?

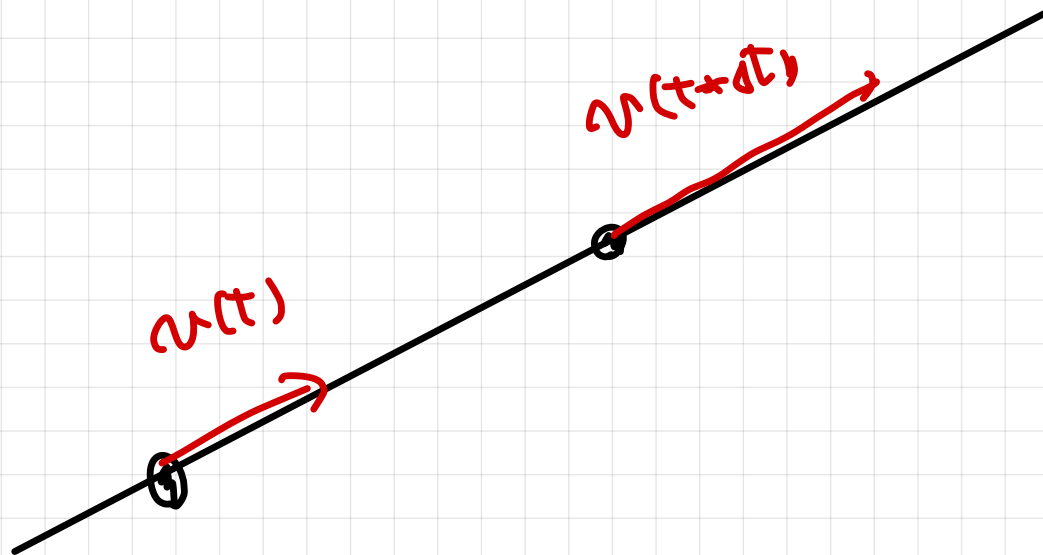
$$\rightarrow \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

時刻 t における瞬間の
速度は?

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt}x(t) = v(t)$$

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

位置の関数と時刻 t を
微分したものが "速度の関数"



平均の速度の変化 = 平均加速度.

$$\frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

時刻 t における瞬間の速度変化
加速度

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

$$a(t) = \frac{d}{dt} v(t)$$

速度の関数で時刻 t で
微分すると加速度の関数になる。

$$a(t) = \frac{d}{dt} v(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) = \frac{d^2}{dt^2} x(t)$$

* v : velocity

a : acceleration

2回微分

物理は時間について微分するとわかる

を簡単に書く.

$$v(t) = \frac{d}{dt} x(t) = \dot{x}(t) \quad \leftarrow \text{ドット}$$

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t) \quad \leftarrow \text{ダブルドット}$$



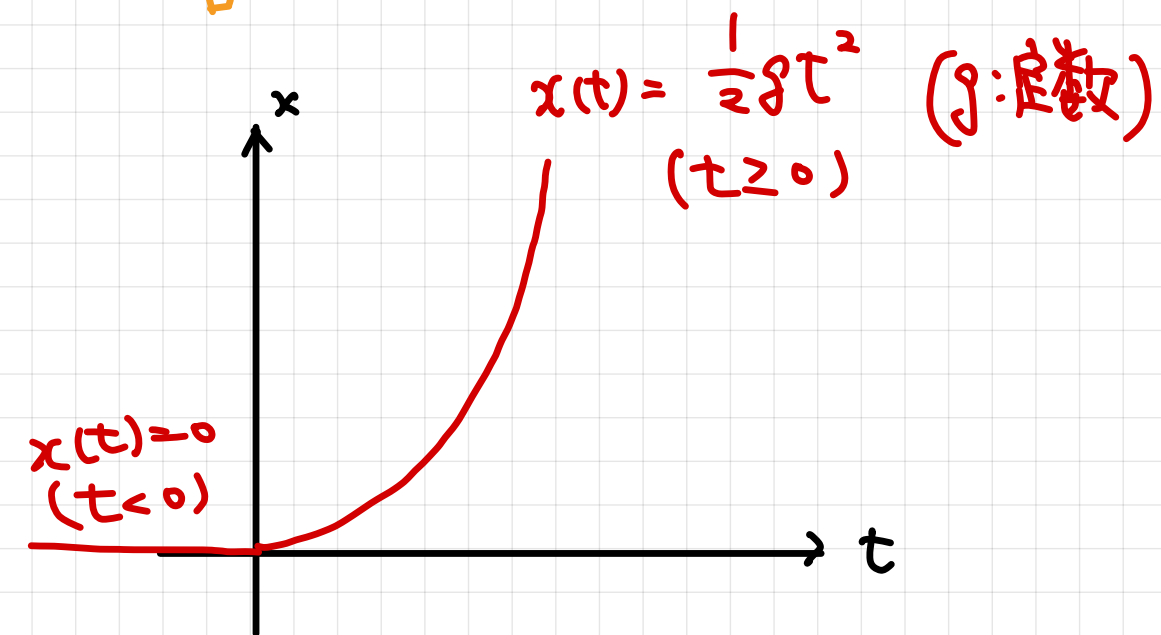
"

$$\dot{x}(t)$$

"

$$\dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$$

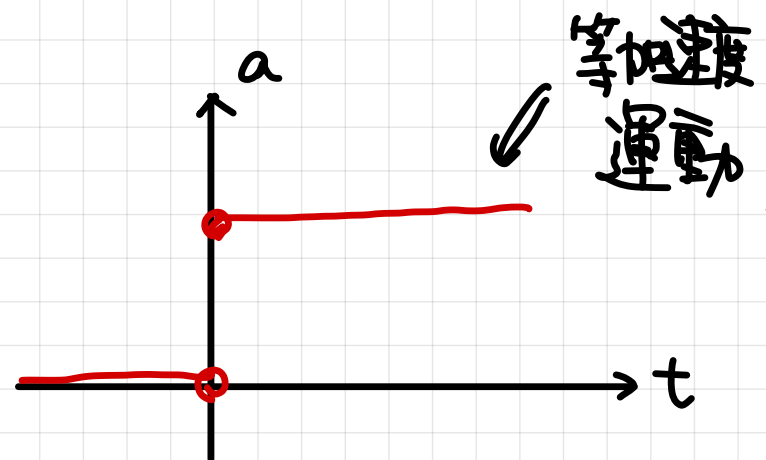
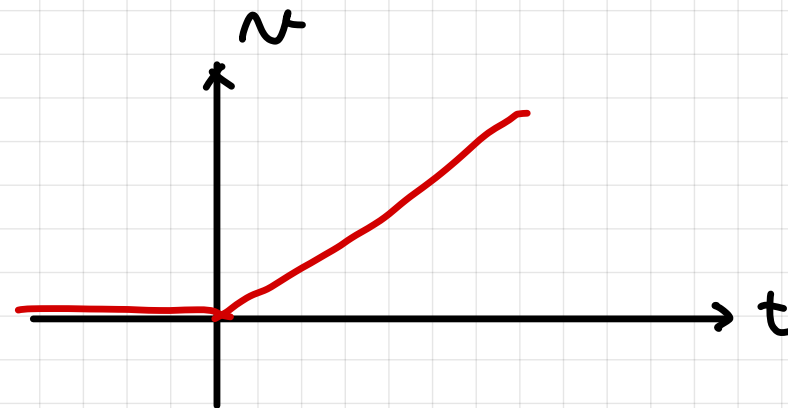
< 演習 >



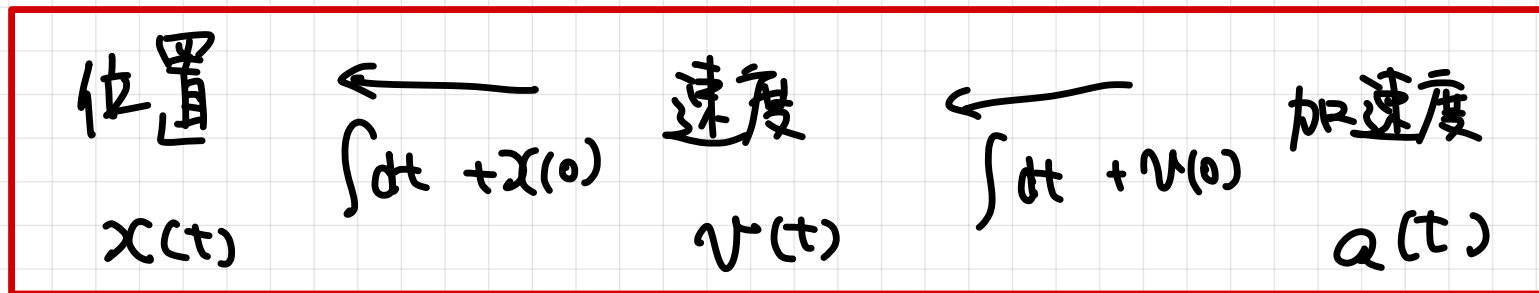
$\therefore a$ 定数. $v(t)$, $a(t)$ を求めて
 位置と速度のグラフをかく。

$$v(t) = \dot{x}(t) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot 2t = gt$$

$$a(t) = \dot{v}(t) = g$$



< 目標 2 . >



$$F(t) = m a(t)$$
$$\Rightarrow x(t)$$

* 積分の基礎も最短?

* ニュートンの偉大な発見への運動方程式

不定積分

$$\frac{d}{dx} (x^2 + C) = 2x$$

← 微分操作

= 定数

$2x \rightsquigarrow x^2 + C$ と逆操作を積分という。

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x) \text{ とい}$$

関係を満たす $F(x)$ は

$f(x)$ の形から導き出したもの積分。

$$\int 2x \, dx = x^2 + C$$

インテグラル 微小積分幅 積分定数

被積分関数 原始関数

↑ ↑

$f(x)$ 積分定数を表す $F(x)$ a とき

積分定数の不定性が残るので不定積分という。

<演習>

$$(1) \int 3x^2 dx$$

$$\Rightarrow \int 3x^2 dx = x^3 + C$$

$$(2) \int 4x^3 dx$$

$$\int 4x^3 dx = x^4 + C$$

$$(3) \int x dx$$

$$\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$(4) \int x^2 dx$$

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$(5) \int 3 dx$$

$$\int 3 dx = 3x + C$$

注意!

$$\int ax^n dx = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + C$$

積分の線形性

$$\frac{d}{dx} (f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} g(x)$$

と $x^4 \pm 5x^3$ の積分を x^4 と $5x^3$ の積分に分ける。

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$f = 2x, g = 3$$

$$\int (2x + 3) dx = \int 2x dx + \int 3 dx = x^2 + C_1 + 3x + C_2$$

$$= x^2 + 3x + \underline{C_1 + C_2}$$

$\Rightarrow$ 定積分の値は $C_1 + C_2$ の和で表される。

<演習>

$$(1) \int (5x^2 + 3x + 1) dx$$

$$= \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + C$$

$$(2) \int (3x^3 - 2x^2 - x - 1) dx$$

$$= \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + C$$

$$(3) \int (3x - 2) dy$$

$\xrightarrow{=}$ 積分

$$= (3x - 2)y + C$$

定積分の計算

定義

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad a \neq b$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

$a \rightarrow b$ は積分区間 (区間 $\frac{1}{b-a}$).

例) $\int_1^3 (2x-3) dx$

$$\int (2x-3) dx = x^2 - 3x + C.$$

$$\int_1^3 (2x-3) dx$$

$$= (3^2 - 3 \cdot 3) - (1^2 - 3 \cdot 1)$$

$$= 2$$

便利に書くと

$$\int_1^3 (2x-3) dx$$

$$= \left[x^2 - 3x \right]_1^3 = 0 - (-2) = 2$$

原始関数 積分区間

<演習>

$$(1) \int_2^4 (x^3 + x) dx$$

$$(2) \int_0^6 (x^2 + 2) dx$$

$$\begin{aligned} & \int_2^4 (x^3 + x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} x^2 \right]_2^4 \\ &= \left(\frac{1}{4} \cdot 4^4 + \frac{1}{2} \cdot 4^2 \right) - \left(\frac{1}{4} \cdot 2^4 + \frac{1}{2} \cdot 2^2 \right) \\ &= (64 + 8) - (4 + 2) = 66 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^6 (x^2 + 2) dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 + 2x \right]_0^6 \\ &= \left(\frac{1}{3} \cdot 6^3 + 2 \cdot 6 \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 0^3 + 2 \cdot 0 \right) \\ &= 72 + 12 = 84 \end{aligned}$$

* この計算も「たた」レベル

定積分の例 - ①

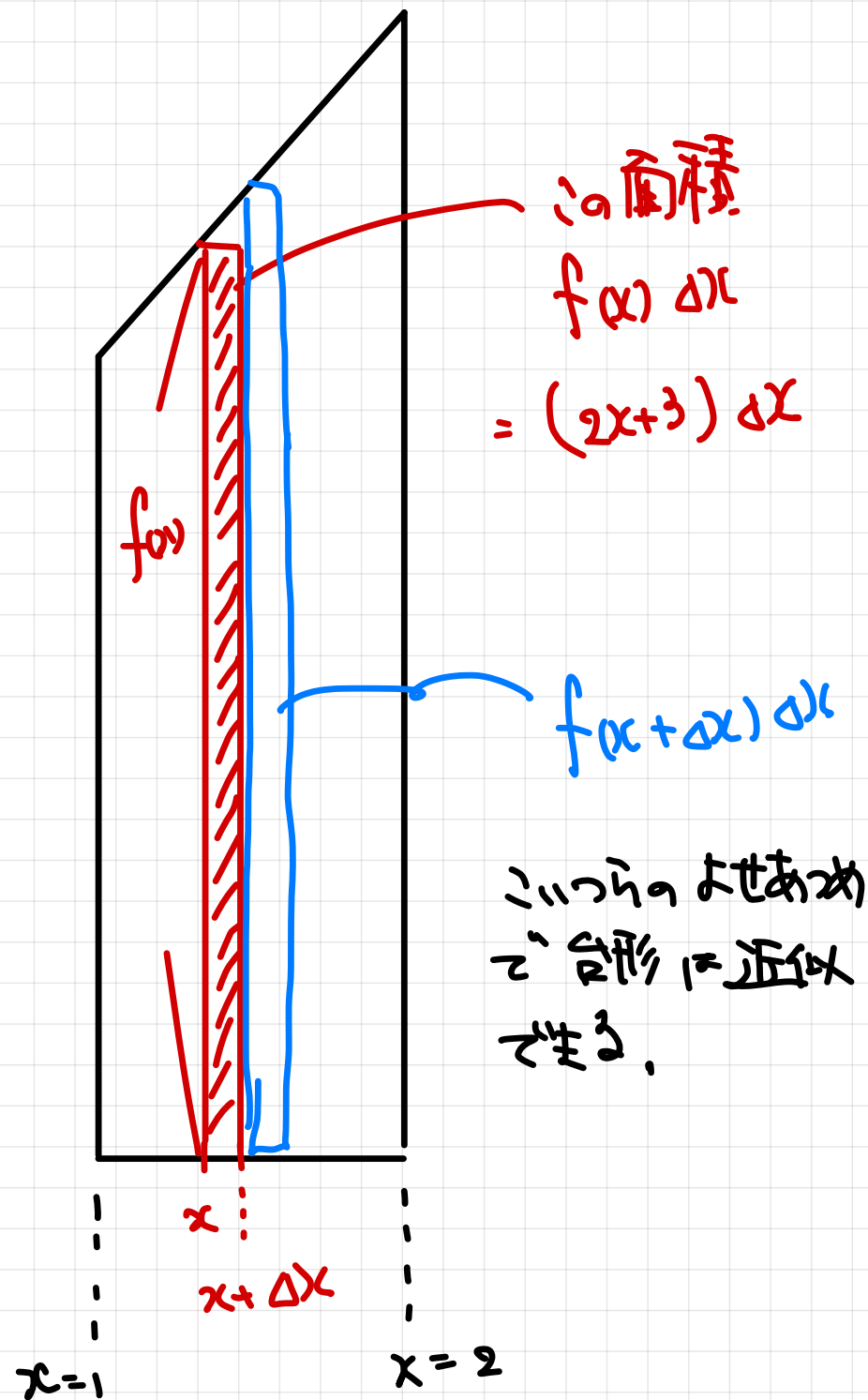
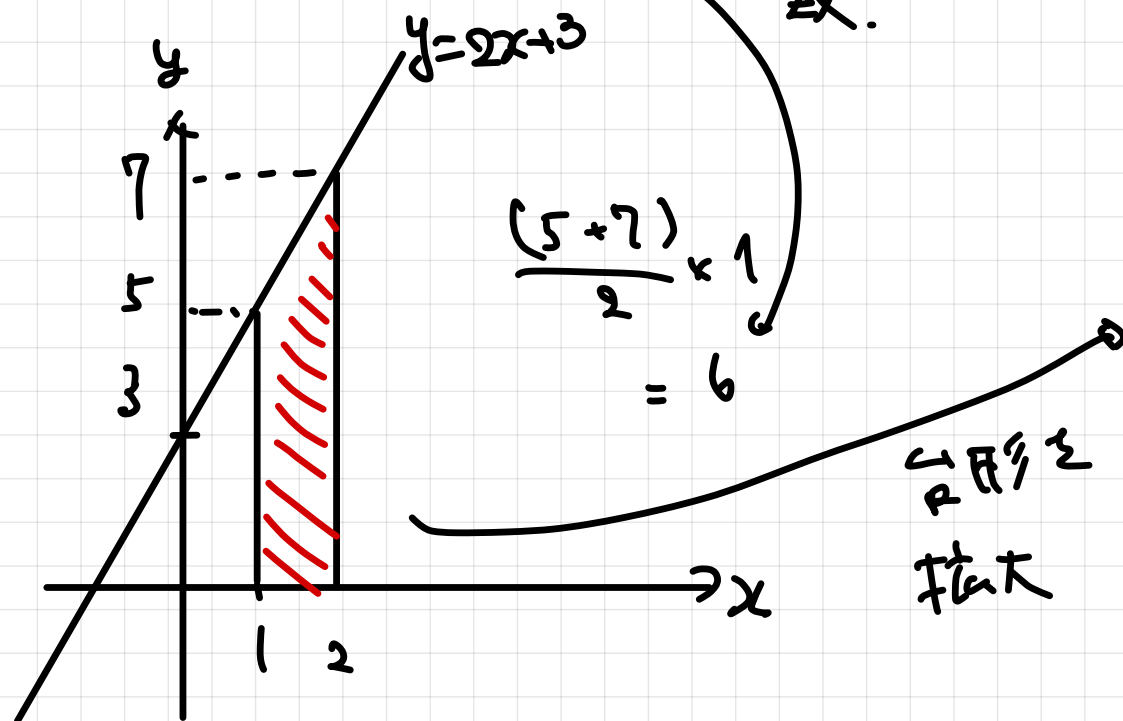
(例)

$$\int_1^2 (2x+3) dx$$

$$= [x^2 + 3x]_1^2$$

$$= 10 - 4 = 6$$

一致.



$$\sum_{x=a}^{x=b} f(x) \Delta x$$

↑
与えられた
記号

↑
スタート &
ゴールの点

$\Delta x \rightarrow 0$
極限
操作

精度が 100% に近づく

$$\int_a^b f(x) dx$$

↑
与えられた
記号

↑
高さ

↑
幅

定積分は
面積の計算

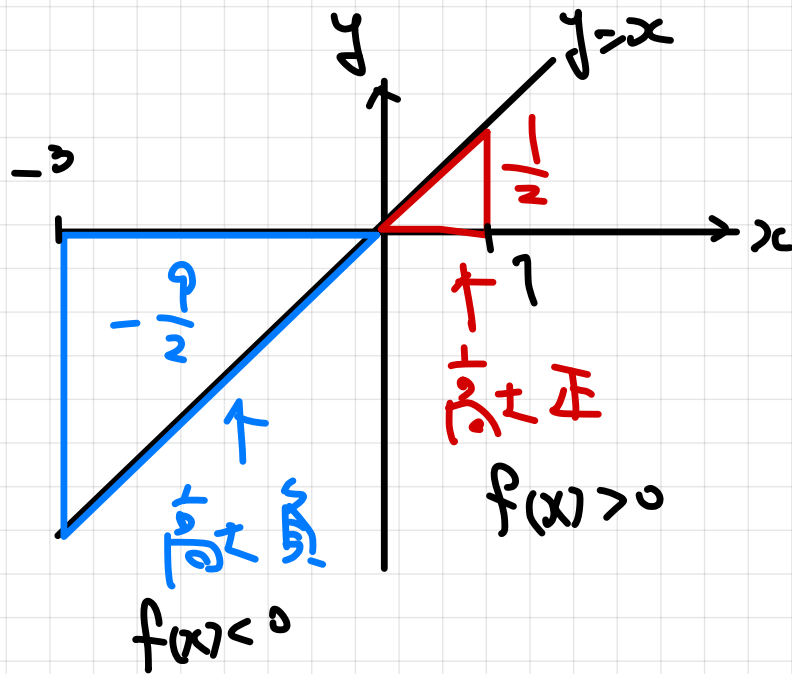
(例)

$$\int_{-3}^1 x dx \quad \text{は?}$$

$$\int_{-3}^1 x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-3}^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{9}{2}$$

$$= -4 \quad \leftarrow \text{面積} \pm \text{は} 2 \times 2?$$

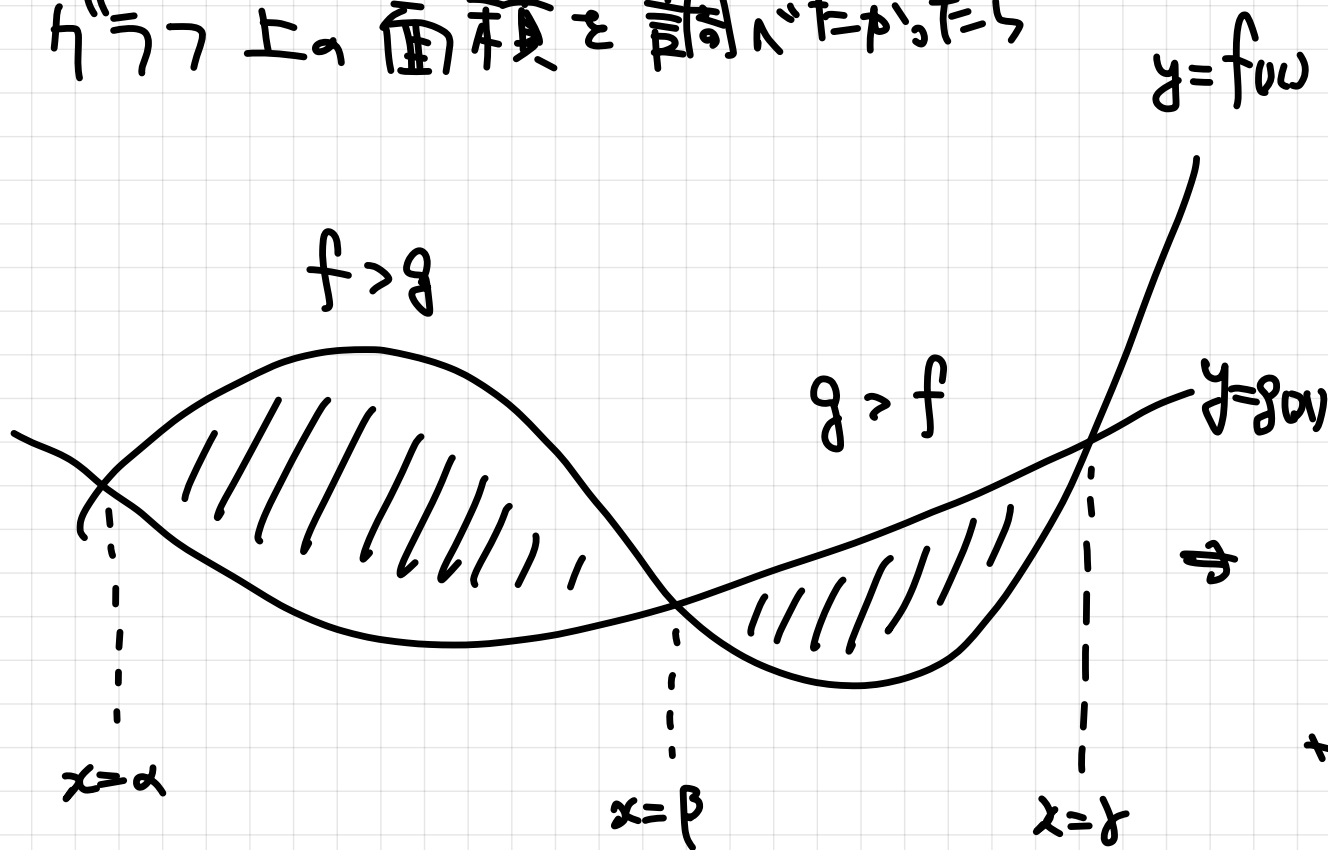


ちがひ=.

$$\int_a^{\beta} f(x) dx = \int_a^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$$

とてあつたの2つ-1と2つ-2とを足すと
 $\text{mitz} \in \text{O.K.}$

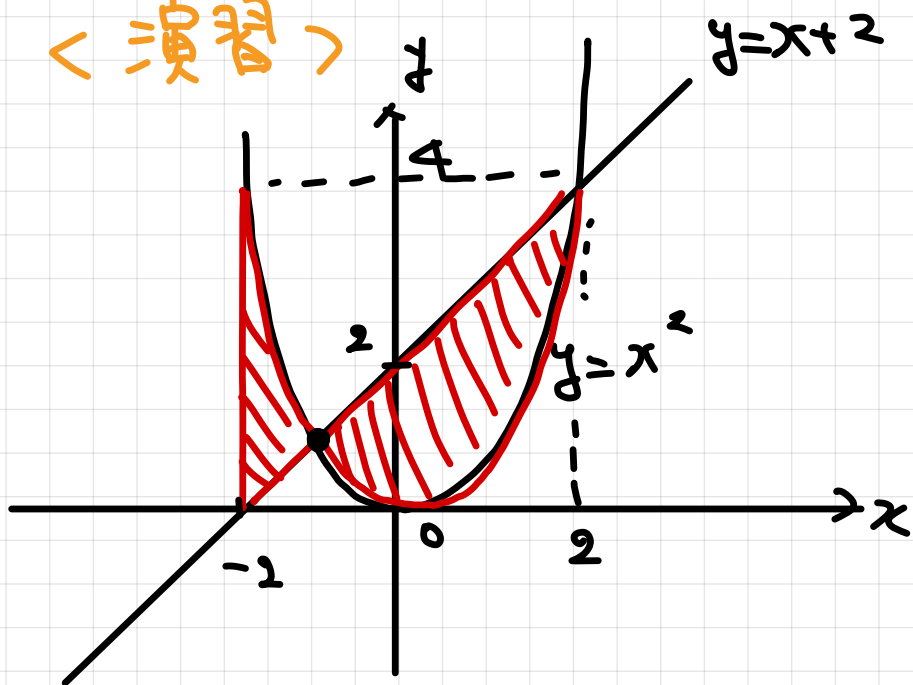
グラフ上の面積を調へたかったら



大 - 小 と(2つだけ)
 $\frac{1}{\text{高}} \pm \text{長} = \text{正}$

$$\Rightarrow \int_a^{\beta} (f(x) - g(x)) dx + \int_{\beta}^{\gamma} (g(x) - f(x)) dx$$

< 演習 >



交点 $\Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$

$$x^2 = x + 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0$$

$$x = 2, -1$$

$$\int_{-2}^{-1} \{x^2 - (x+2)\} dx + \int_{-1}^2 \{(x+2) - x^2\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^2$$

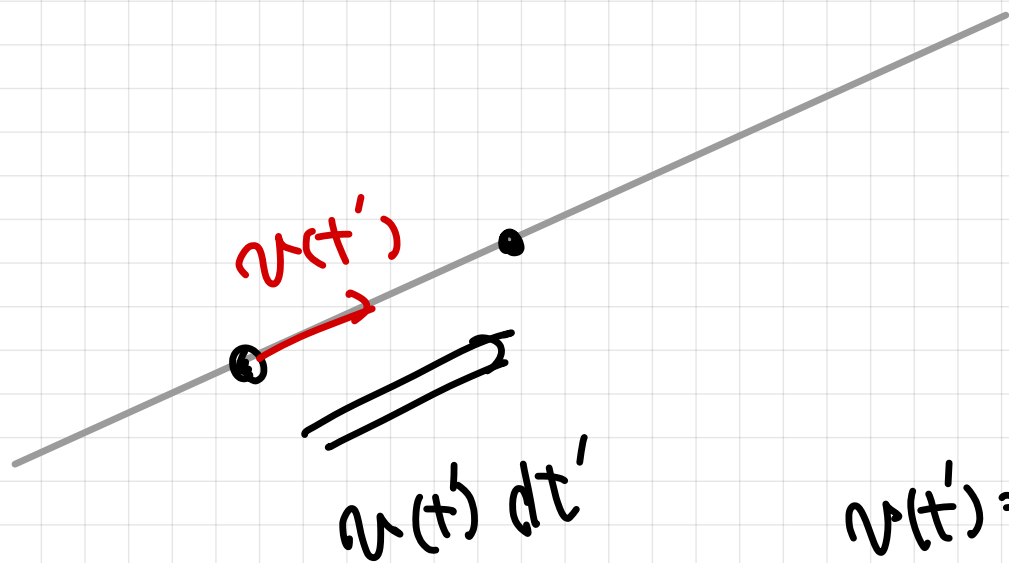
$$= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) - \left(-\frac{8}{3} - 2 + 4 \right)$$

$$+ \left(-\frac{8}{3} + 2 + 4 \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right)$$

$$= -\frac{2}{3} - 1 + 4 + 4$$

$$= \frac{-2 - 3 + 12 + 12}{3} = \frac{19}{3}$$

位置, 速度, 加速度 2



$t' : t_0 \rightarrow t$

$$\int_{t_0}^t v(t') dt' = [x(t')]_{t_0}^t$$

$$= x(t) - x(t_0)$$

$$v(t') = \frac{dx}{dt'}$$

$$\rightarrow x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t \underbrace{v(t')}_{\text{速度}} dt'$$

初期位置

この2つの情報から
位置, 情報が確定する,

速度も同様

$$\int_{t_0}^t a(t') dt' = [v(t')]_{t_0}^t \\ = v(t) - v(t_0)$$

$$\underline{v(t)} = \underline{v(t_0)} + \int_{t_0}^t \underline{a(t')} dt'$$

初速度

加速度

＝あつあつ情報から
速度・情報決定する。

<演習> ($t \geq 0$)

$$(1) \begin{cases} a_{(t)} = a_0 \quad (\text{定数}) \\ v(t=0) = v_0 \\ x(t=0) = x_0 \end{cases} \quad \text{あた.$$

($t \geq 0$) について

$v(t)$ と $x(t)$ を求めよ。

(2)

$x_0 = 0$ とき。

$$v^2(t) - v^2(0) = 2a_0 x(t)$$

を示せ。

$$\begin{aligned}
 1) \quad v(t) &= v_0 + \int_0^t a(t') dt' \\
 &= v_0 + \int_0^t a_0 dt' \\
 &= v_0 + [a_0 t']_0^t \\
 &= v_0 + a_0 t
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x_0 + \int_0^t v(t') dt' \\
 &= x_0 + \int_0^t (v_0 + a_0 t') dt' \\
 &= x_0 + \left[v_0 t' + \frac{1}{2} a_0 t'^2 \right]_0^t \\
 &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad x_0 = 0 \text{ 且}$$

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$$

$$\dot{x} = 2a_0 x \text{ 且}$$

$$2a_0 x(t) = 2a_0 v_0 t + a_0^2 t^2$$

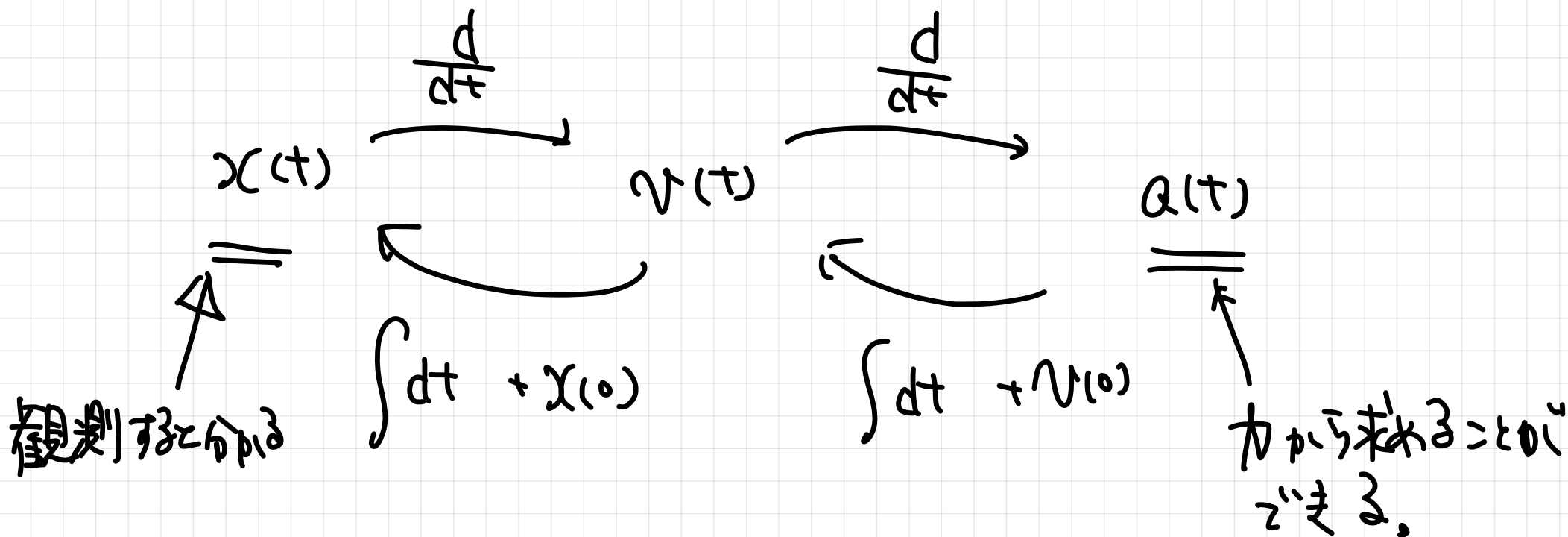
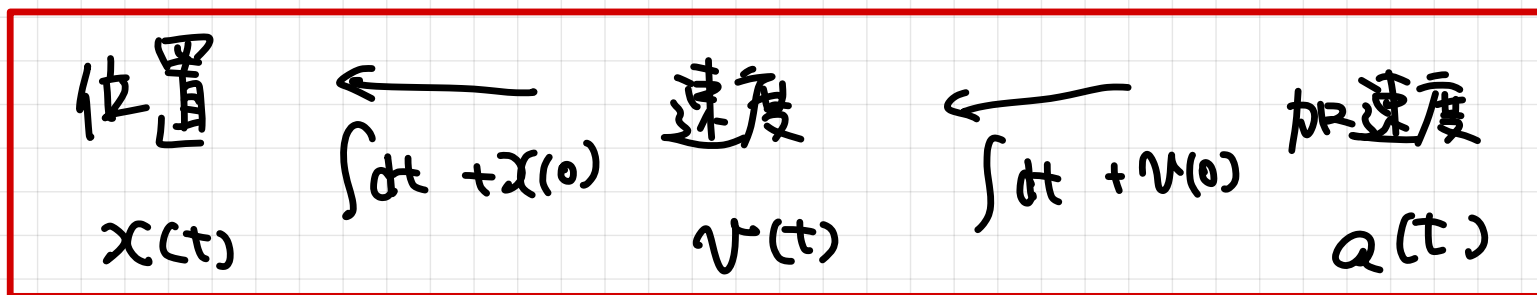
$$\therefore v(t) = v_0 + a_0 t \text{ 且}$$

$$a_0 t = v(t) - v_0 \text{ 且}$$

$$\begin{aligned}
 2a_0 x(t) &= 2v_0 (v(t) - v_0) \\
 &\quad + (v(t) - v_0)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (v(t) - v_0) \times \\
 &\quad (2v_0 + v(t) - v_0) \\
 &= v(t)^2 - v_0^2
 \end{aligned}$$

ここから $t=0$ から t まで.



運動方程式

加速度から力を定義することになる。

$$\begin{array}{ccccc}
 F(t) & = & m & a(t) & \text{(運動方程式)} \\
 \text{力} & & \text{質量} & \text{加速度} & \\
 N & & kg & m/sec^2 & \\
 \text{ニュートン} & & \text{キログラム} & \text{メートル毎秒毎秒} & \\
 & & \text{を用いる} & \text{を用いる} &
 \end{array}$$

*	$x(t)$	単位 m
	$v(t)$	m/sec
	$a(t)$	m/sec^2

力の概念を知っているときには
運動方程式は原理

定義も原理も出発地点と
するところ。

(辞書を引いてはいいね)

(例) 質量 m の質点に

$t=0$ 以降、力を x 軸正方向に

F の大きさで与え続けた。

$t \geq 0$ における $v(t)$ と $x(t)$ を求めよ。

$t=0$ として $v(0)=0$, $x(0)=0$ とする。

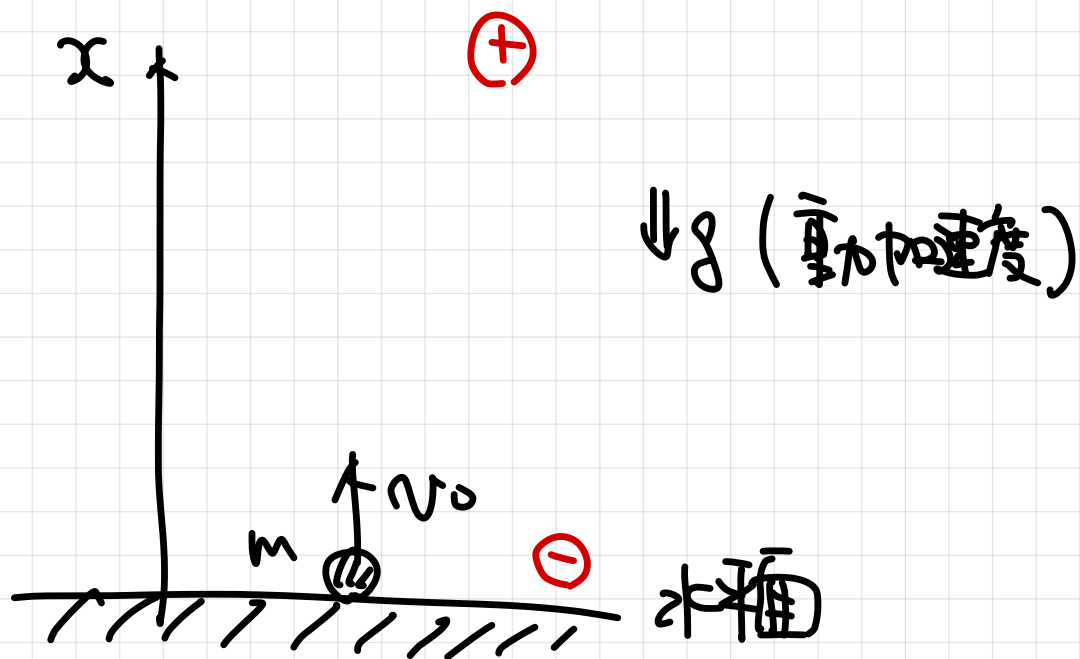
運動方程式より $a(t) = \frac{F}{m}$

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a(t') dt'$$

$$= \frac{F}{m} t$$

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \int_0^t v(t') dt' \\ &= \frac{F}{2m} t^2 \end{aligned}$$

< 演習 >



$F = -mg$ を受ける。

(1) $v(t)$, $x(t)$ を求めよ

(2) 最高到達点の高さはいくら?

$$\begin{aligned} (1) \quad F &= ma \\ \Rightarrow \underline{-mg} &= ma \\ a &= -g \end{aligned}$$

上の '+' と '↓' は
力を受けるから $(-mg)$

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + \int_0^t (-g) dt' \\ &= v_0 - gt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= 0 + \int_0^t (v_0 - gt') dt' \\ &= v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}$$

(2) 最高点 $v = 0$

$$v(t_{\text{top}}) = v_0 - gt_{\text{top}} = 0$$

$$t_{\text{top}} = \frac{v_0}{g}$$

$$\begin{aligned} x(t_{\text{top}}) &= v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2} \\ &= \frac{v_0^2}{2g} \end{aligned}$$

* 2次関数 補習

数Iで習う 2次関数、補足しておく。

(i) $y = f(x)$ と $y - b = f(x - a)$ の関係

(ii) 平方完成 & 2次関数のグラフ

(iii) 2次関数の最大最小

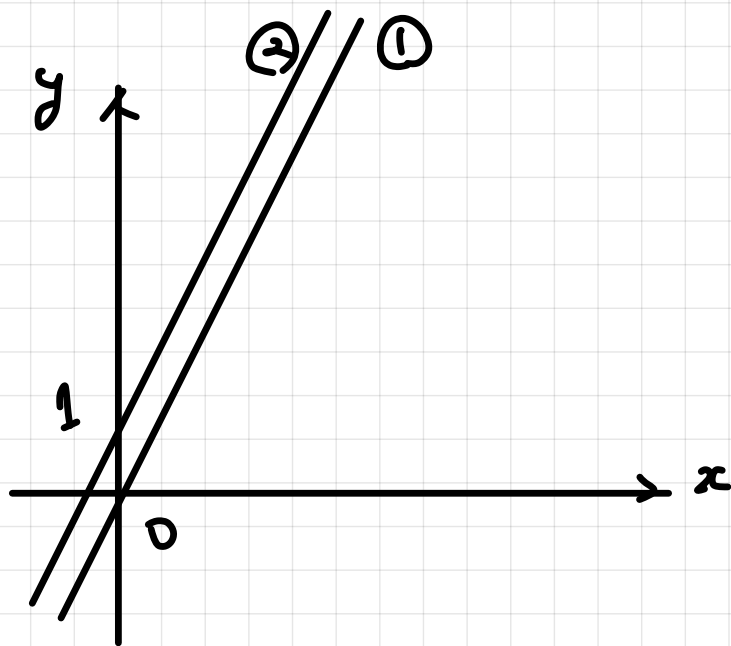
(i)

① $y = 2x$ と

② $y - 3 = 2(x - 1)$ の関係

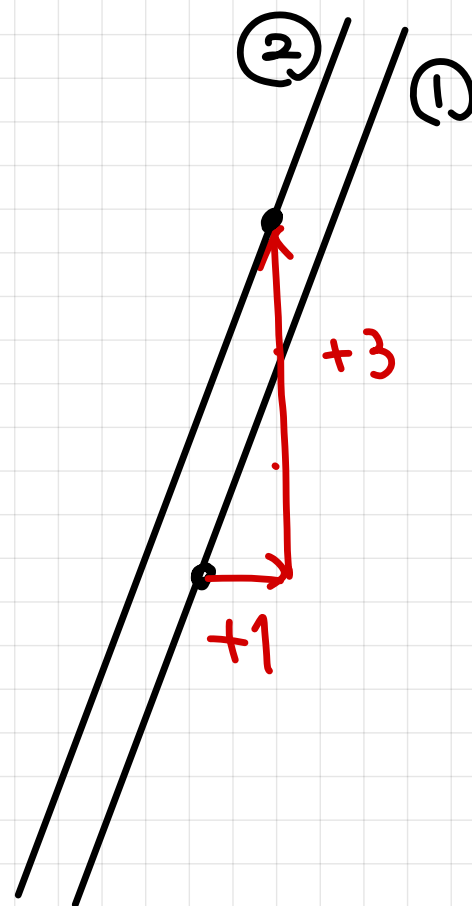
② を整理する.

$$\begin{aligned} y &= 2x - 2 + 3 \\ &= 2x + 1 \end{aligned}$$



$y = f(x)$ x 方向 $+a$
 y 方向 $+b$

$$y - b = f(x - a)$$



(ii) 平方完成 & 2次関数あがり

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = x^2 - 3x + \frac{9}{4}$$

2次関数も同じ。

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = x^2 - 3x$$

$$y = -2x^2 + 6x + 1$$

x^2 の係数

$$x^2 \text{ と } x \text{ の係数を } 3$$

$$= -2(x^2 - 3x) + 1$$

$$= -2 \left\{ \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \right\} + 1$$

— a 部分が $\frac{1}{2}$ になる () になる
よって $\frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$

$$= -2 \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} + 1$$

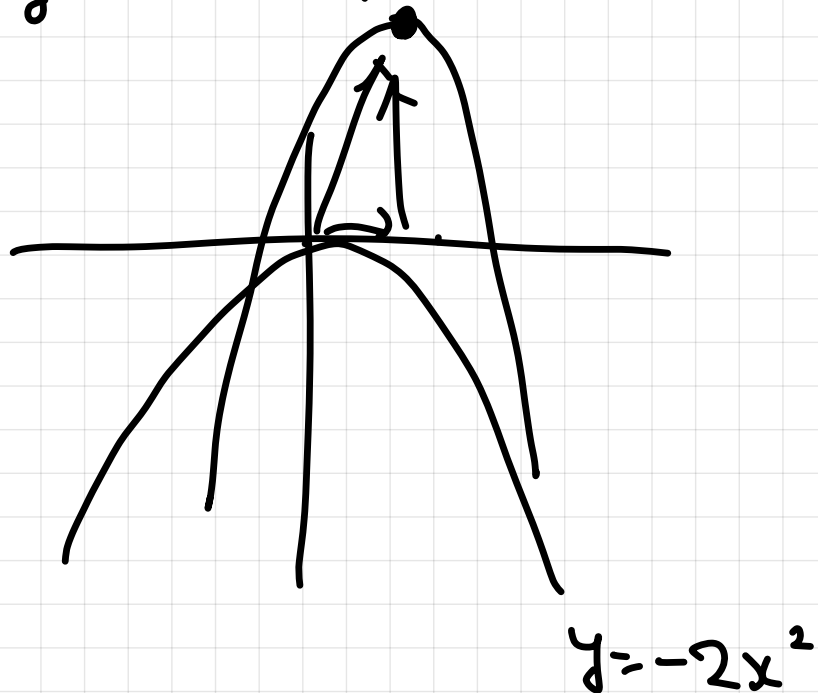
$$= -2 \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{2}$$

$$y = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{2}$$

$$y - \frac{11}{2} = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$$

$$y = -2x^2$$

$x \text{ の値} = +\frac{3}{2}$
 $y \text{ の値} = +\frac{11}{2}$



$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ 2 平射完成±世2最大値を求めよ。

$$= -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t$$

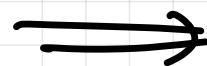
$$= -\frac{1}{2} g \left(t^2 - \frac{2v_0}{g} t \right)$$

$$= -\frac{1}{2} g \left[\left(t - \frac{v_0}{g} \right)^2 - \frac{v_0^2}{g^2} \right]$$

$$= -\frac{1}{2} g \left(t - \frac{v_0}{g} \right)^2 + \frac{v_0^2}{2g}$$

~~~~~

== 平射完成±世2最大



$$t = \frac{v_0}{g} \text{ 2 世2}$$

$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

\* 平射完成±世2

「 $t_0$ 」  $\hookrightarrow$  「 $t_0$ 」

演習は 必須

# 相対位置、相対速度、相対加速度1



Aより見たBの位置は

$$\underline{x_B(t) - x_A(t)} : \text{相対位置}$$

相手 - 自分 距離はこれちゃう  
 ↓  
 なせ?!

Bより見たAの位置

$$\underline{x_A(t) - x_B(t)} < 0$$

相手 - 自分

負になることもある。



Aより見たBの速度。

$$\underline{v_B(t) - v_A(t)} : \text{相対速度}$$

相手 - 自分

Aより見たBの  
 Bより見たAの

$$\underline{v_A(t) - v_B(t)}$$

高速道路で車が車を追いかけてる状態は  
 $v_A > v_B$

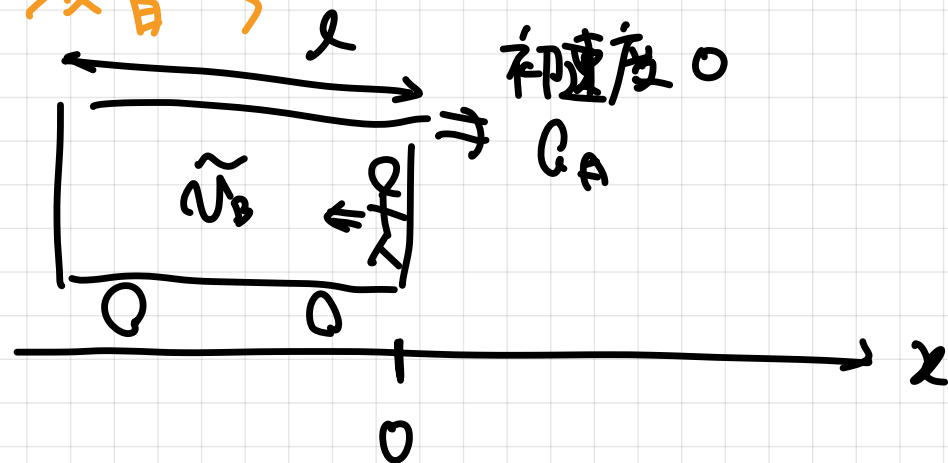


Aから見たBの相対加速度は?

$$Q_B(t) - Q_A(t)$$

相手 - 自分

< 演習 >



(電車に)  $+x$  方向に  $a_A$  等加速度運動

人が電車に対して相対速度  $-u_B$  で  
等速度運動

(1) 電車の長さ  $l$  が人より短い。  
人が電車へ入るまでにかかる  
時間  $t$  は?

(2)  $t=0$  とき、電車の先頭の  $x$  は?

(3) " 人 の  $x$  は?

(1) 人が見らる電車は25m.

$$t = l \div \tilde{v}_B = \frac{l}{\tilde{v}_B}$$

(2) 電車速度  $v_A = 0 + \int_0^t a_A dt'$

$$= a_A t$$

$$x_A = 0 + \int_0^t a_A t' dt'$$

$$= \frac{1}{2} a_A t^2$$

$$x_A\left(\frac{l}{\tilde{v}_B}\right) = \frac{1}{2} a_A \cdot \frac{l^2}{\tilde{v}_B^2}$$

(3) 人の速度を  $v_B$  とする.

$$-\tilde{v}_B = v_B - v_A$$

$$v_B = v_A - \tilde{v}_B$$

$$= a_A t - \tilde{v}_B$$

$$x_B = 0 + \int_0^t (a_A t' - \tilde{v}_B) dt'$$

$$= \frac{1}{2} a_A t^2 - \tilde{v}_B t$$

$$x_B\left(\frac{l}{\tilde{v}_B}\right) = \frac{1}{2} a_A \frac{l^2}{\tilde{v}_B^2} - l$$

$$= x_A\left(\frac{l}{\tilde{v}_B}\right) - l$$

当  $t = \frac{l}{\tilde{v}_B}$  のとき  $\Rightarrow$

## < 目標 3 >

ベクトル  $\alpha$  の合成 & 分解

$\Rightarrow$  カッコリ合い

\* ベクトルの基本  $\Sigma$  最短ルート

\* 「止まっている」ってどういうことか

# 円、方程式

中学数学で出てくる図形の方程式

直線 :  $y = ax + b$

放物線 :  $y = ax^2 \ (a \neq 0)$

双曲線  
(反比例) :  $y = \frac{a}{x} \ (a \neq 0)$

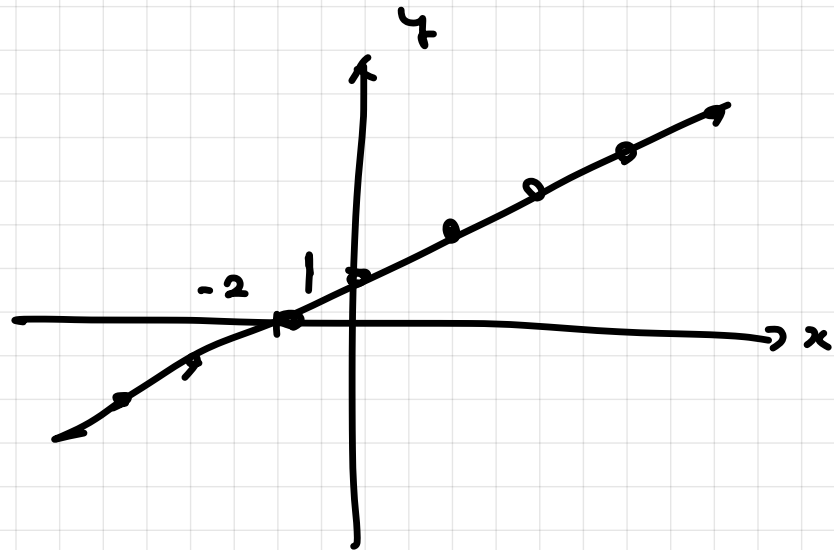
$$y = ax^2 \quad \begin{array}{l} x : +\alpha \\ y : +\beta \end{array}$$

$$y = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

④ 形、方程式、意味。 ————— )

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

|   |    |    |    |   |   |   |   |     |
|---|----|----|----|---|---|---|---|-----|
| x | -5 | -4 | -3 | 0 | 2 | 4 | 6 | ... |
| y | -2 | -1 | 0  | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |



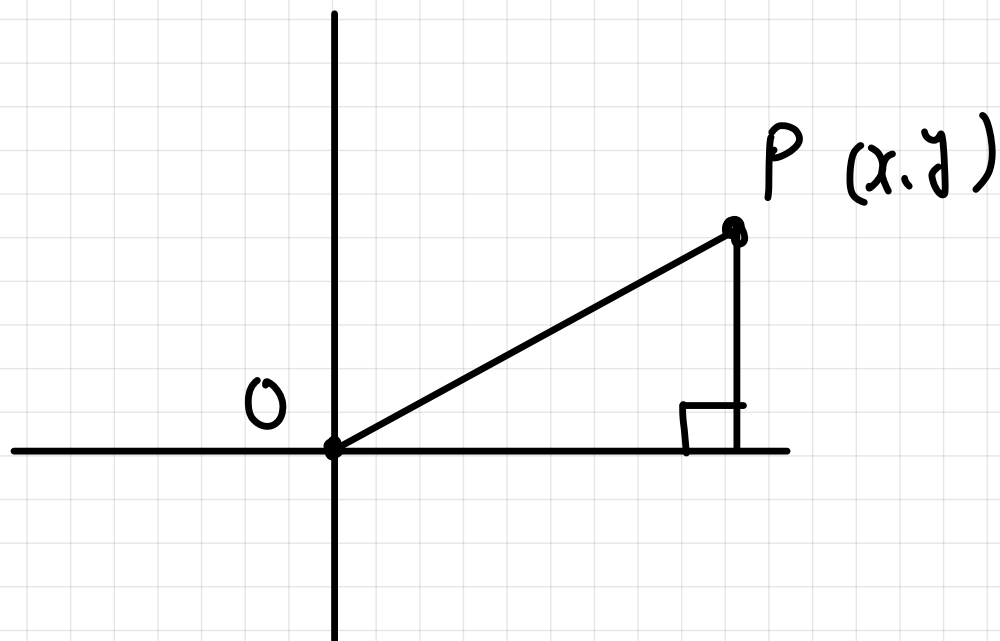
$(x, y)$  = 点の座標

$$y = \frac{1}{2}x + 1 \quad \text{かゝる式}$$

この式を満たす全ての  $(x, y)$  は

直線上にある。

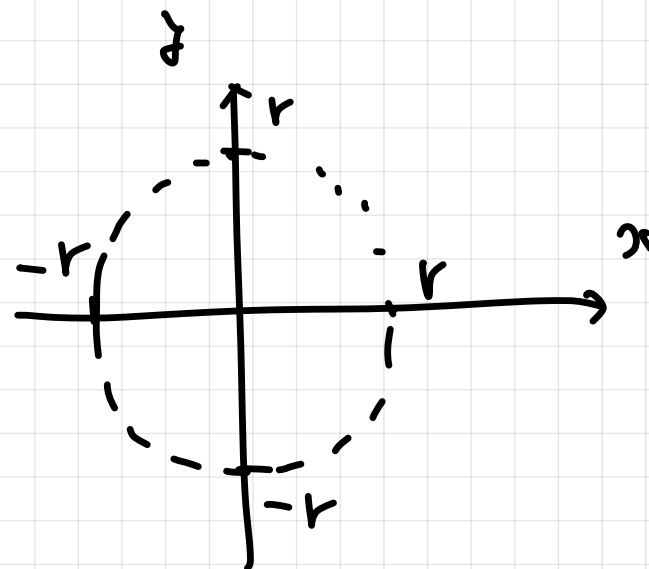
円 = 半径  $r$  の円



$$OP = \sqrt{x^2 + y^2}$$

= 半径一定値  $r$  とする

$P \in \text{円}$  ならば  $r$



$$\sqrt{x^2 + y^2} = r$$

$$x^2 + y^2 = r^2 : \text{円の方程式}$$

中心 : 原点

半径 :  $r$

中心が原点以外の場合

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{を平行移動}$$

$$y = f(x) \quad \rightarrow \quad y - \beta = f(x - \alpha)$$

$x: +\alpha$   
 $y: +\beta$

⇐ 平行移動

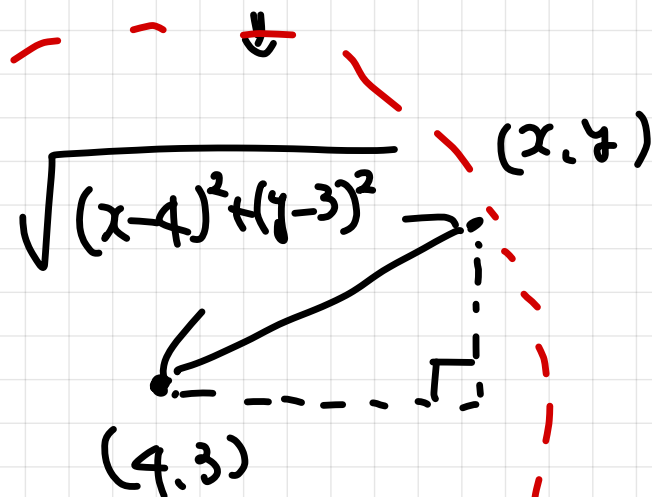
$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \rightarrow \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

$$\text{中心: } (\alpha, \beta)$$

$$\text{半径: } r \quad \text{a } \mathbb{R}$$

$$\text{中心 } (4, 3)$$

$$\text{半径 } 5 \text{ a } \mathbb{R} \text{ 何?}$$



$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} = 5$$
$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$$

# 弧度法

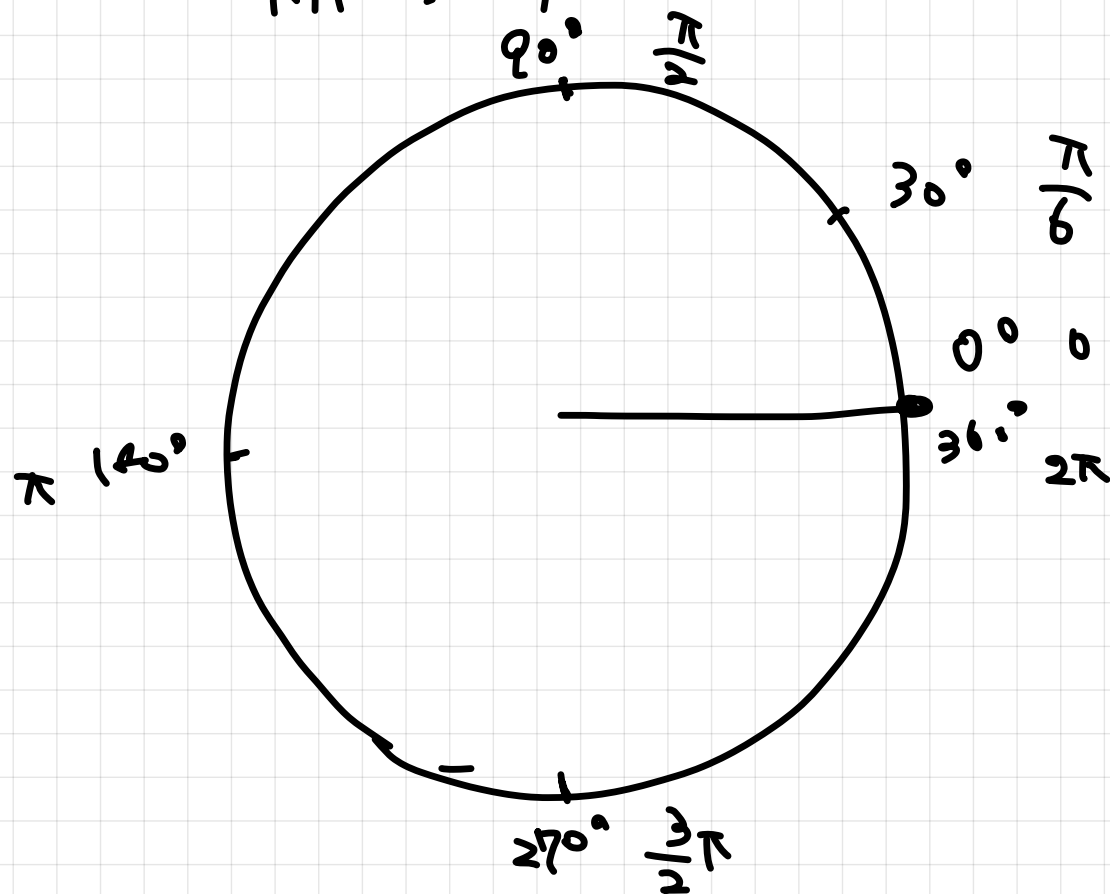
物理では 角度を扱う時に  
 度数法と 使うより 弧度法を  
 使うのが 便利なことだわ

|      |   |                 |               |
|------|---|-----------------|---------------|
| 360° | → | 2π              | ラジアン<br>[rad] |
| 180° | → | π               |               |
| 90°  | → | $\frac{\pi}{2}$ |               |
| 60°  | → | $\frac{\pi}{3}$ |               |
| 45°  | → | $\frac{\pi}{4}$ |               |
| 30°  | → | $\frac{\pi}{6}$ |               |
| 0°   | → | 0               |               |

メートル? センチ? フィート? 尺? 寸?

メートル

メートル? センチメートル? フィート?



# <演習>

ラジアン に直せ

(1)  $225^\circ$       (2)  $-15^\circ$

(3)  $1^\circ$

(4) 半径  $r$  と 中心角  $\theta$  の 扇形の 弧長と 面積を求めよ。

(1)  $180^\circ \rightarrow \pi$   
 $\times \frac{\pi}{180}$

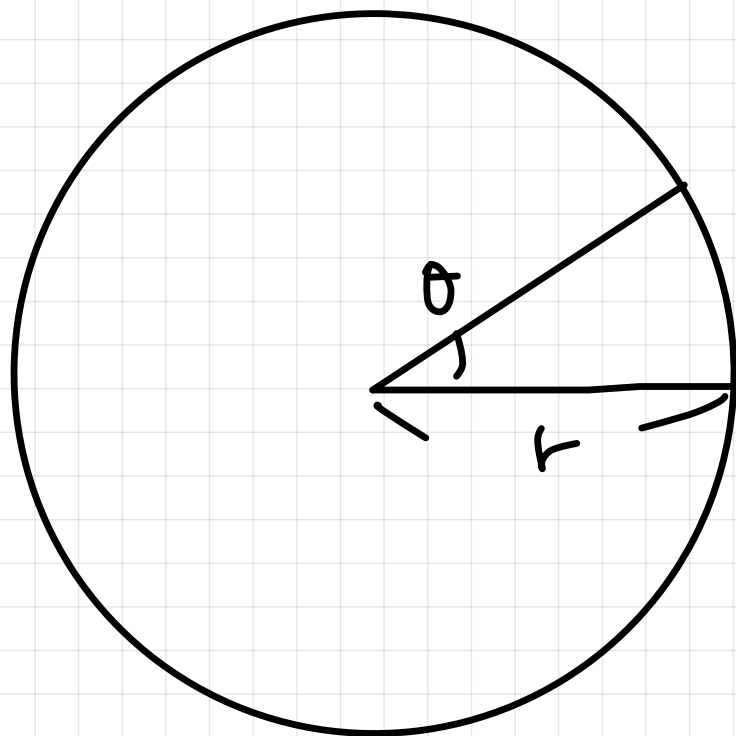
$$225 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5}{4} \pi$$

$$\begin{array}{r} \cancel{180} + 5 \\ \hline 225 \end{array} \quad \begin{array}{l} 5 \\ 4 \end{array}$$

(2)  $-15^\circ$   
 $-15 \times \frac{\pi}{180} = \frac{-15\pi}{180} = \frac{-\pi}{12}$

(3)  $\frac{\pi}{180}$

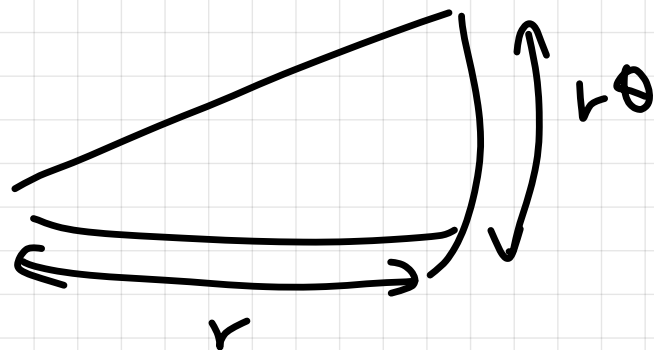
(4)



$$\text{弧長} : 2\pi r \times \frac{\theta}{2\pi} = r\theta$$

$r=1$  のときの弧長の長さは  
弧長 = 角度の数値の長さ

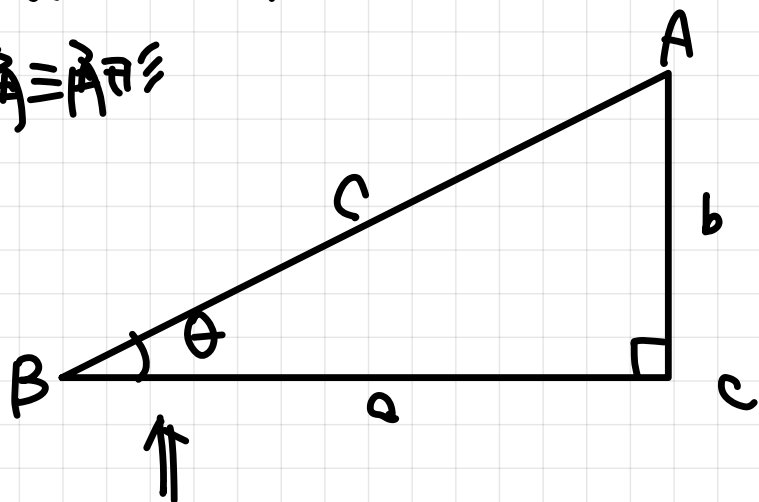
$$\begin{aligned} \pi r^2 \times \frac{\theta}{2\pi} &= \frac{r^2 \theta}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot r \cdot r\theta \end{aligned}$$



# 三角関数

まずは三角比から。

直角三角形



この角度  $\theta$  を決めるには  
 $\rightarrow$   
 $\rightarrow$

形は  $\angle$  によって決まる。

( \* 直角三角形の相似条件  
 (中学数学) を思い出して )

形が決まる

$\Rightarrow$  辺 a 比 形が決まる。

これは名前をつけて(こう)

$$\frac{b}{c} = \sin \theta$$

$$\frac{a}{c} = \cos \theta$$

$$\frac{b}{a} = \tan \theta$$

形が  
 $\theta$  が変わると。

a, b, c が  
 変わる?

sin

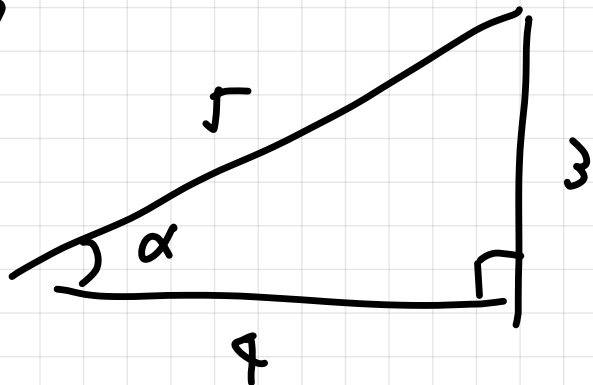
cos

tan は

全て  $\theta$  の関数  
 である関数。  
 名前を付けて置く。

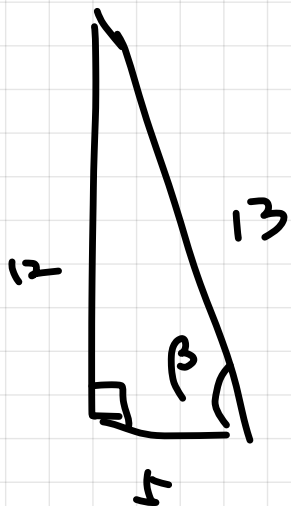
# < 演習 >

(1)



$\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\tan \alpha$  ?

(2)



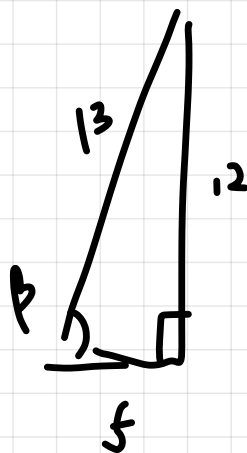
$\begin{cases} \sin \beta \\ \cos \beta \\ \tan \beta \end{cases}$

$$(1) \quad \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{3}{4}$$

(2)

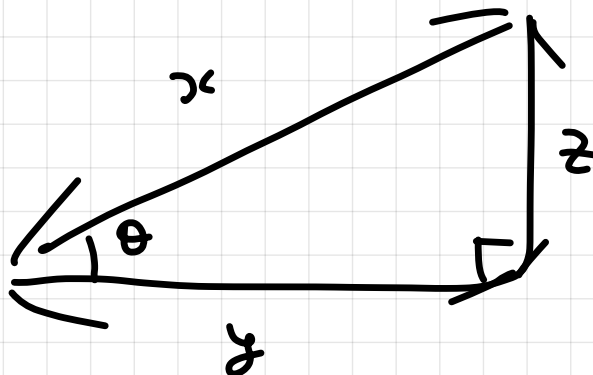
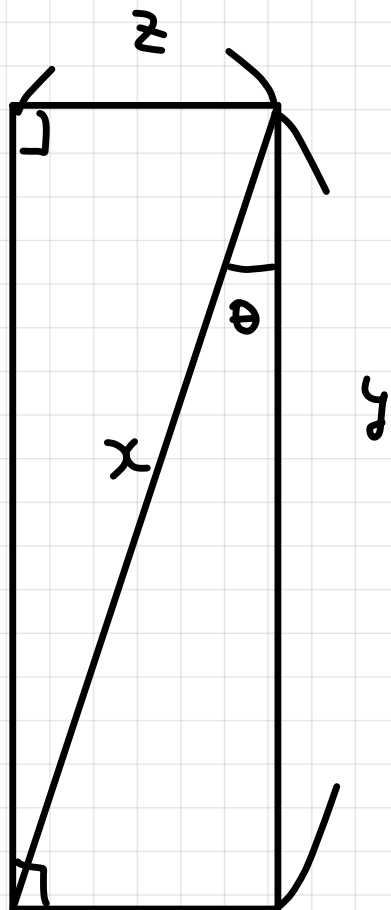


$$\sin \beta = \frac{12}{13}$$

$$\cos \beta = \frac{5}{13}$$

$$\tan \beta = \frac{12}{5}$$

(3)



$$\sin \theta = \frac{z}{x}$$

$$\underline{z = x \sin \theta}$$

$$\cos \theta = \frac{y}{x}$$

$$\underline{y = x \cos \theta}$$

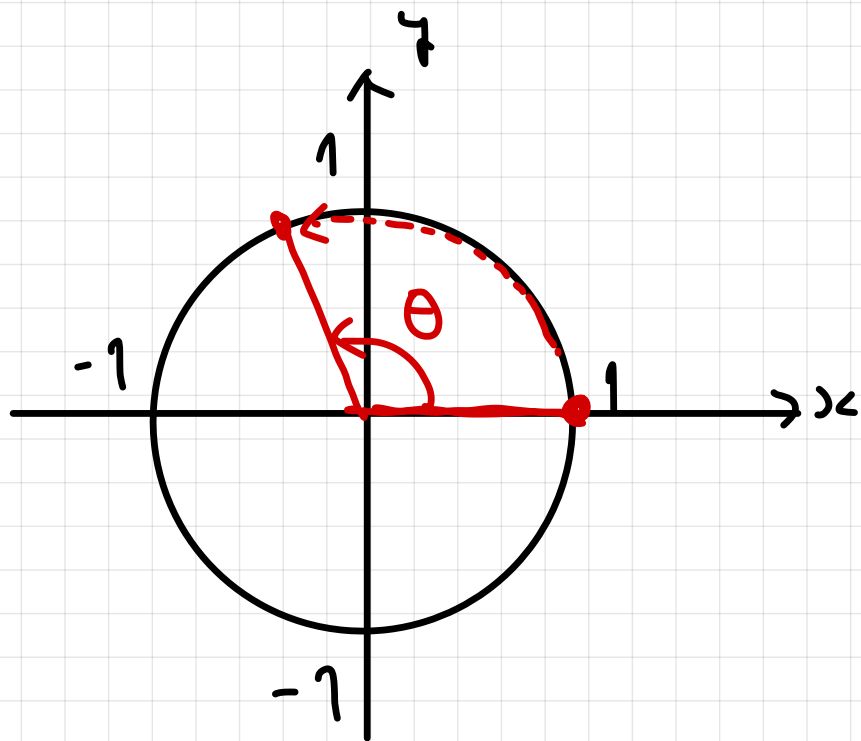
x と  $\theta$  を使って z と y を表す。

直角三角形で使う。

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad (90^\circ)$$

この定義が生じる。

↓ 拡張



半径 1 の円 : 単位円。

単位円上を (1, 0) から

時計回り(逆)にたどっていく。

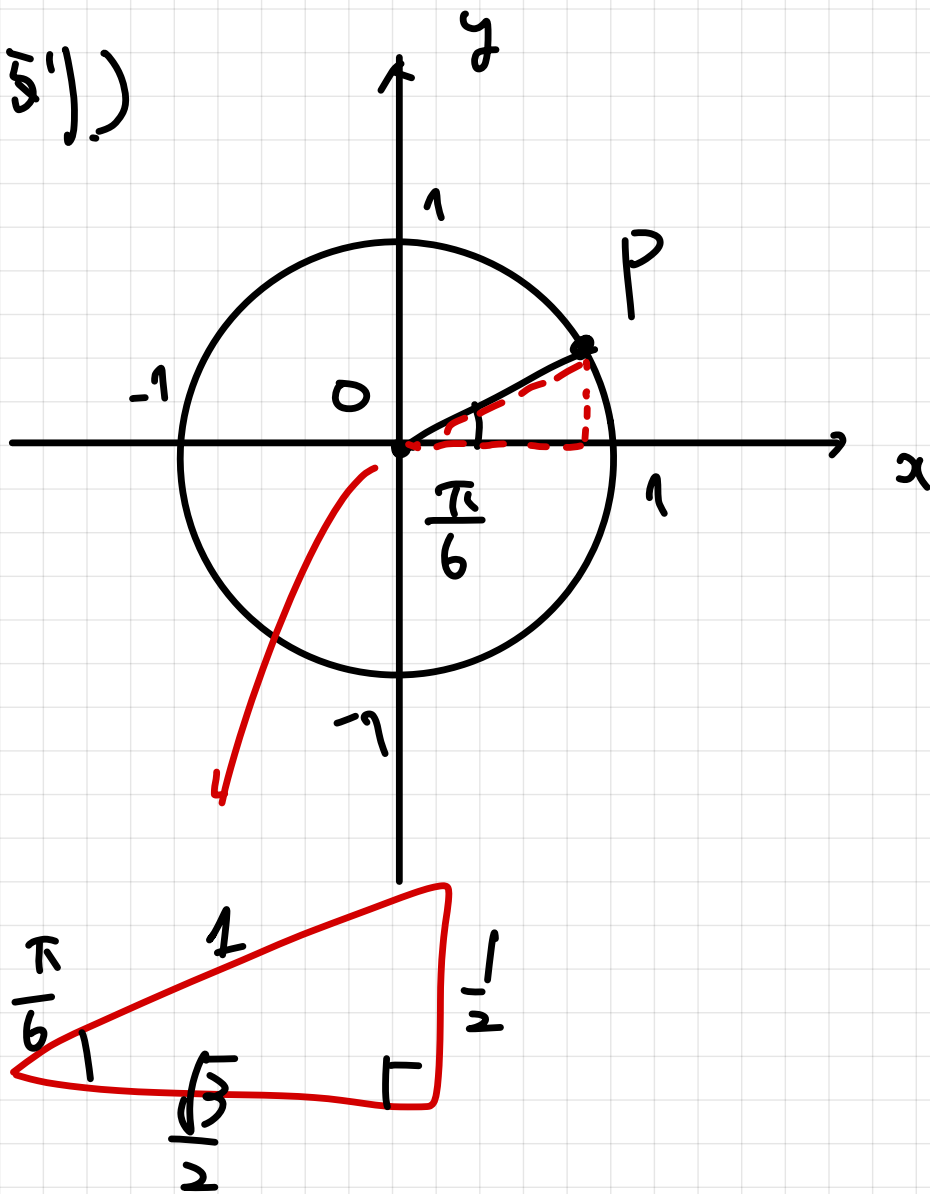
これにたいして  $\theta = 0 \sim 2\pi$  まで。

$\sin \theta$  : y 座標

$\cos \theta$  : x "

$\tan \theta$  : 傾き

(55')

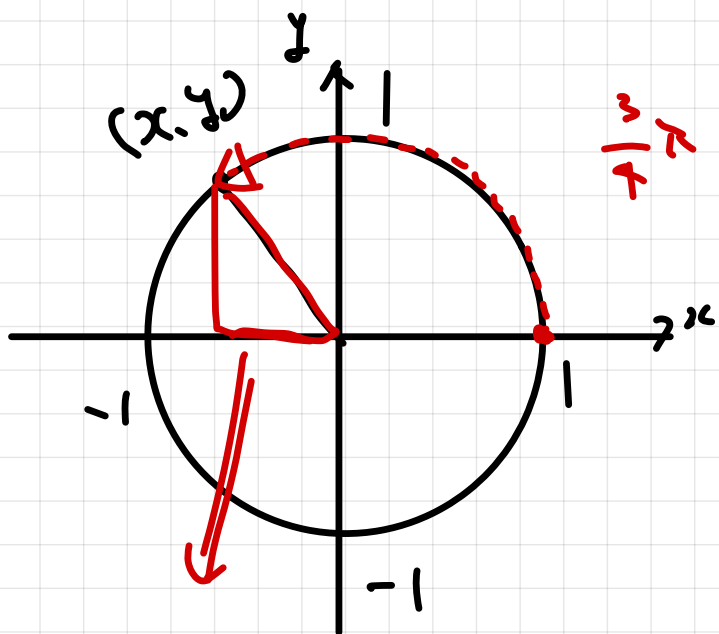


$$\Rightarrow \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2} \quad (x)$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (y)$$

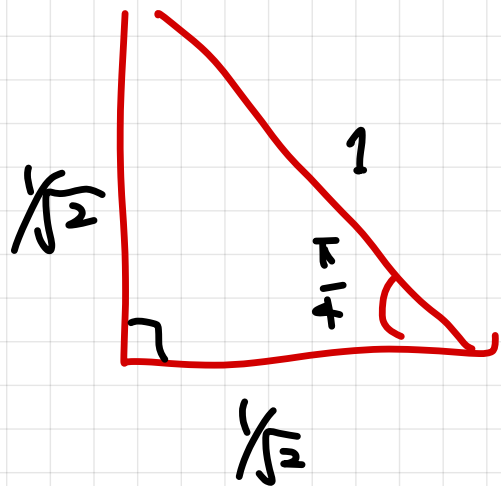
$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$OP \text{ is } 1$



$$(x, y) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{3}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \frac{3}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \tan \frac{3}{4}\pi = -1 \end{array} \right.$$

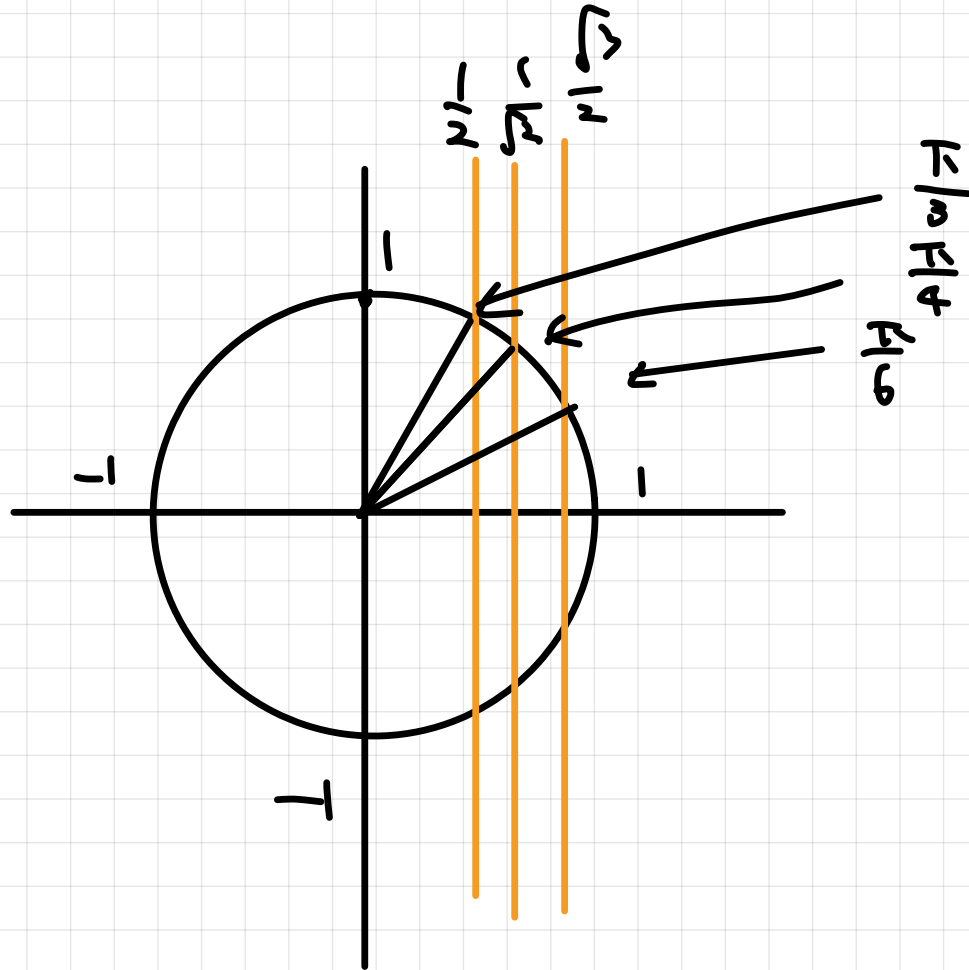


$\sin, \cos$  2° 42' 30" 値.

$$0, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\tan$

$$0, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm 1, \pm \sqrt{3}, \text{定義で決まる.}$$



$$\frac{1}{\sqrt{3}}, 1, -1, -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(0, 1), (0, -1)$$

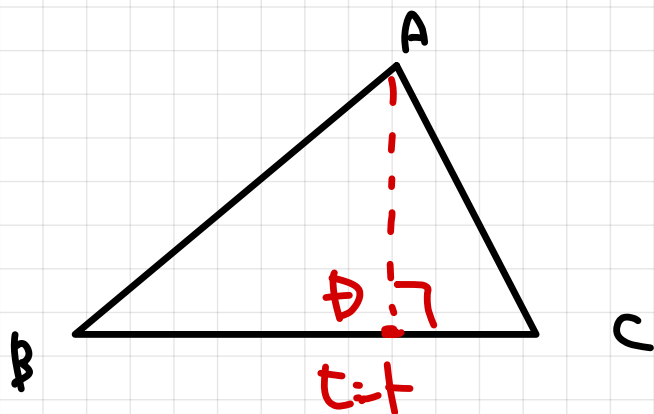
12分 10分 10分 10分

# 練習

(1) 三角形の面積

$$\frac{1}{2} BA \times BC \times \sin \angle ABC$$

と、 $2\pi$  まで



$0 \leq \theta < 2\pi$  のとき、 $\theta$  の値を求めよ。

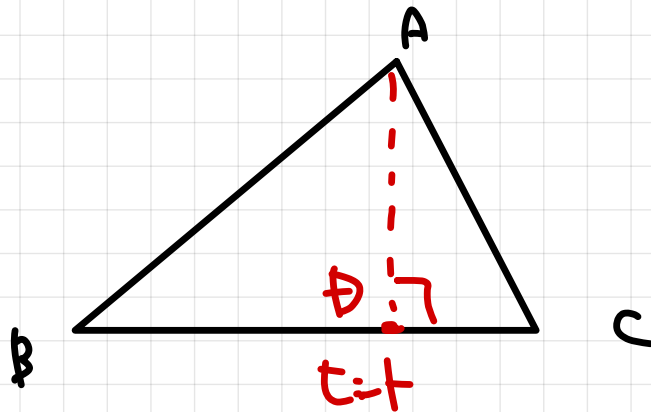
(2)

$$\sin \theta_1 = \frac{1}{2} \quad \theta_1 = \underline{\hspace{2cm}} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos \theta_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \theta_2 = \underline{\hspace{2cm}} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan \theta_3 = -1 \quad \theta_3 = \underline{\hspace{2cm}} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

(1)



$$S = \frac{1}{2} AD \times BC$$

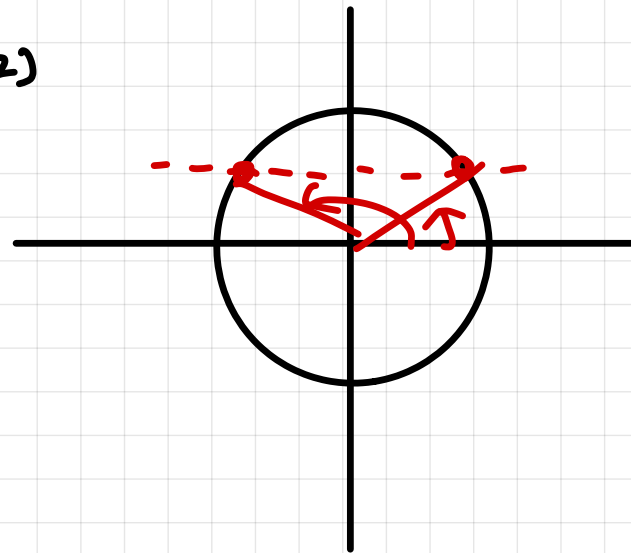


$$\sin \angle ABC \times AB$$

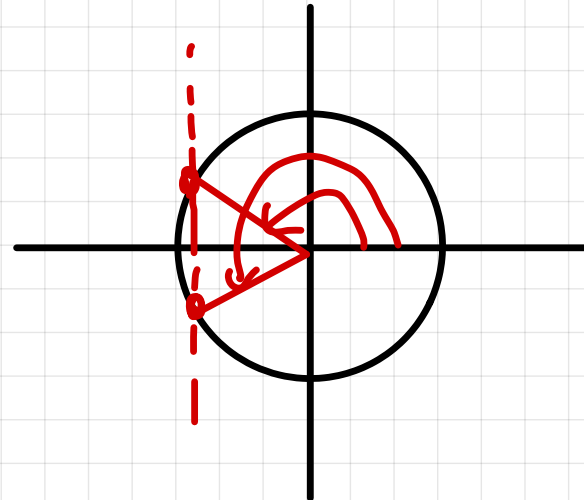
$$= \frac{AD}{AB}$$

$$= \frac{1}{2} \times BA \times BC \times \sin \angle ABC$$

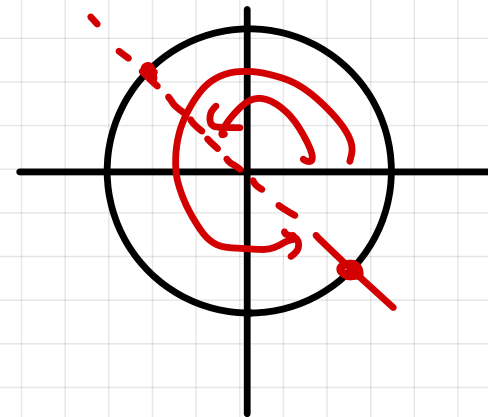
(2)



$$\theta_1 = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$



$$\theta_2 = \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$$



$$\theta_3 = \frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$$

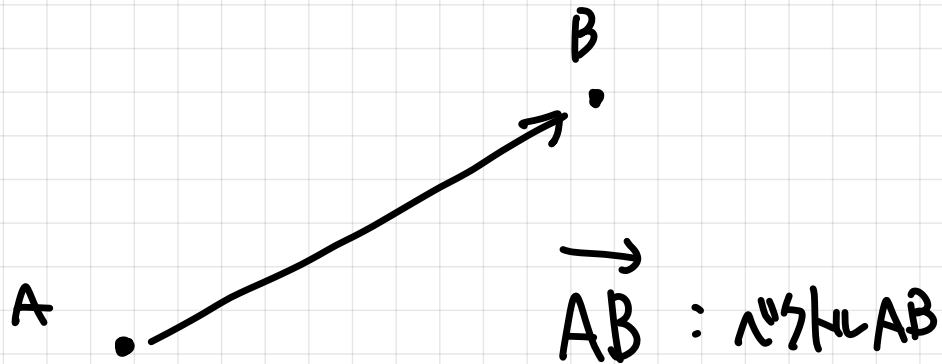
## ベクトルとは

\* 微積分よりさらに難しく人間的に分類  
(高校数学)

とはいえ、難しい問題は少ない

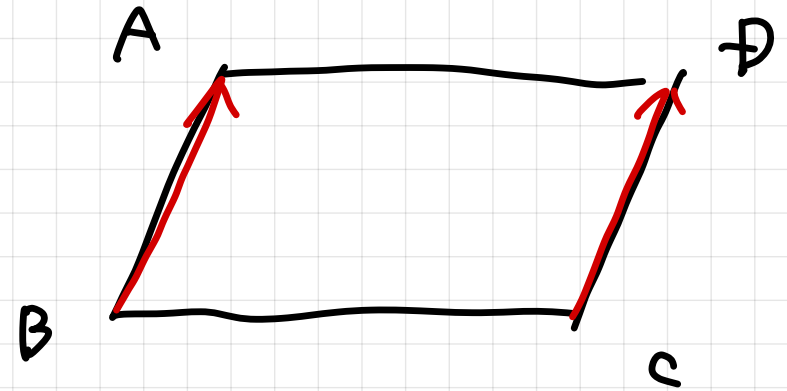
ベクトル : 大きさと向きがあるもの。

力とか、速度とか、矢印で表現する。



始点と終点の両方を書くこともあるが、  
この AB に対して  $\vec{AB}$  と名前をつけることもできる。  
ただ、慣れが必要。

これは「図形的な話から  
平行四辺形 ABCD

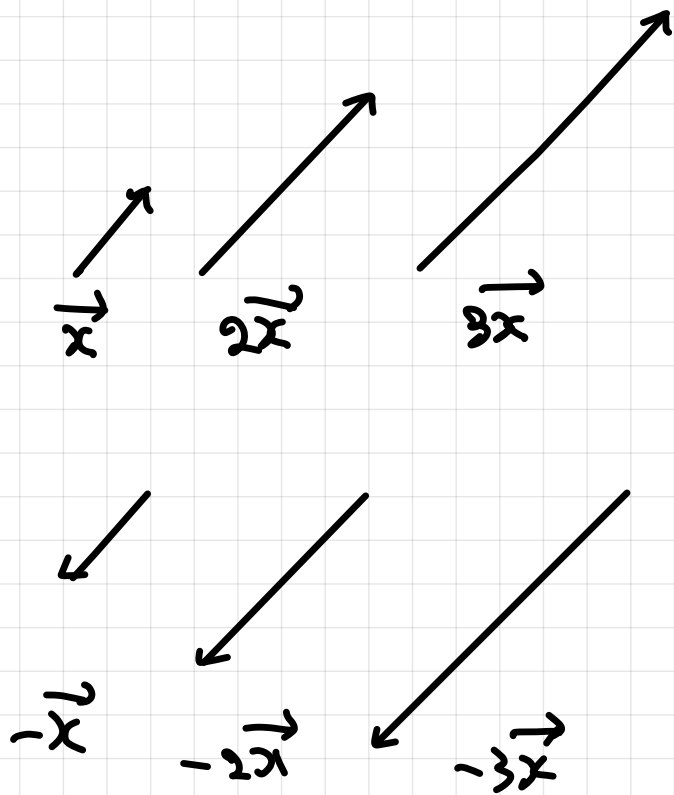


$$\vec{AB} = \vec{CD}$$

大きさと向きが同じなら同じベクトル

$$\vec{AB} \neq -\vec{DC}$$

$$\vec{AD} = \vec{BC}$$



$\vec{x}$  を  $k$  倍 ( $k > 0$ ) すると  
 大きさ (長さ) が  $k$  倍になる。  
 $-k$  倍 すると、向きが「逆」になる。  
 大きさが  $k$  倍になる。

ただし、

$$\vec{x} \times 0 = \vec{0}$$

(数)

↑  
0 倍

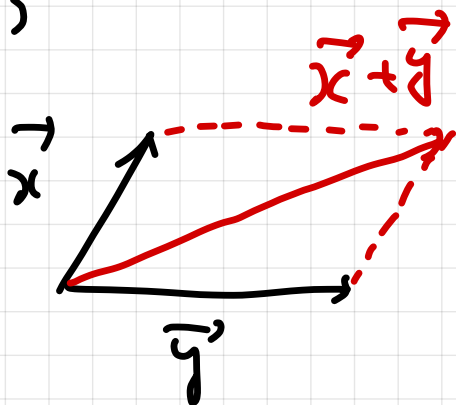
↑  
ゼロベクトル

成分表示に注意。  
 ゼロとゼロベクトル  
 の違いは「リテラチュア」  
 だけ。

ベクトル同士の計算、計算以外  
 は別の文字と計算は同じで  
 できる。

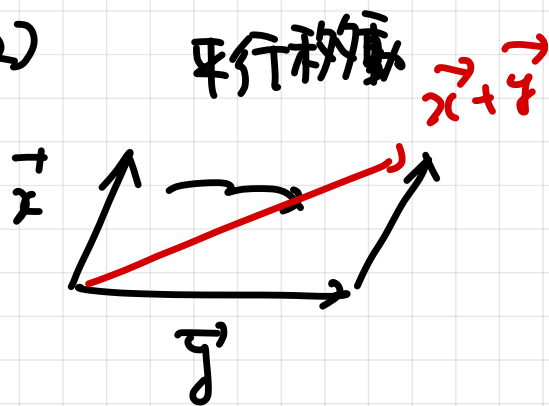
# ベクトルの合成と分解

(1)



平行四辺形  
= 作. 2  
対角線

(2)



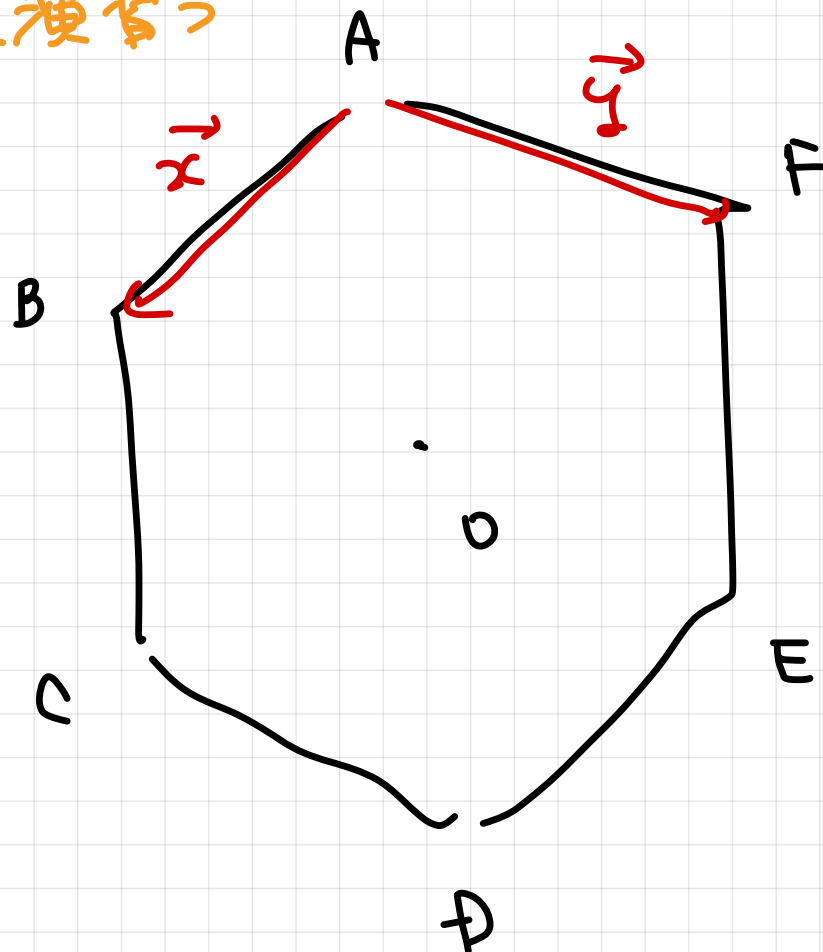
平行移動

$x+y$

片方のベクトル  
始点を、  
もう片方のベクトル  
終点に合わせて。

あとは片方だけ。

## ＜演習＞



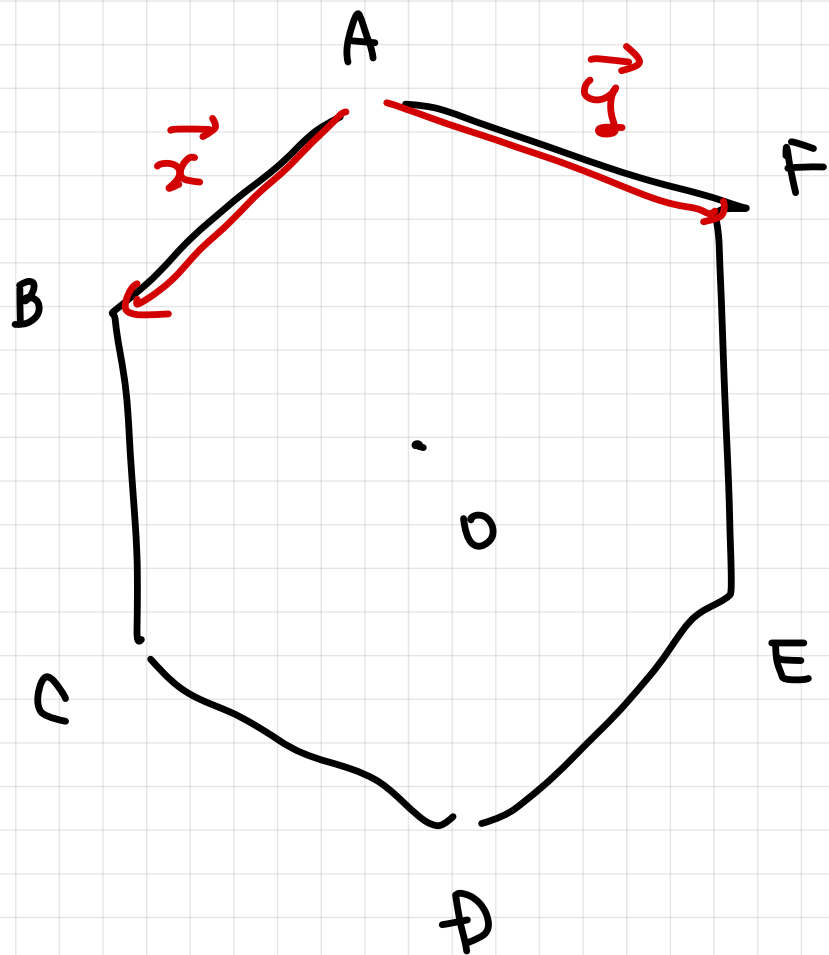
(1)  $\vec{BC}$

(2)  $\vec{AC}$

(3)  $\vec{AE}$

(4)  $\vec{AD}$

(5)  $\vec{CE}$



$$1) \vec{BC} = \vec{AO} = \vec{x} + \vec{y}$$

$$\begin{aligned} (2) \vec{AC} &= \vec{AB} + \vec{BC} \\ &= \vec{x} + (\vec{x} + \vec{y}) = 2\vec{x} + \vec{y} \end{aligned}$$

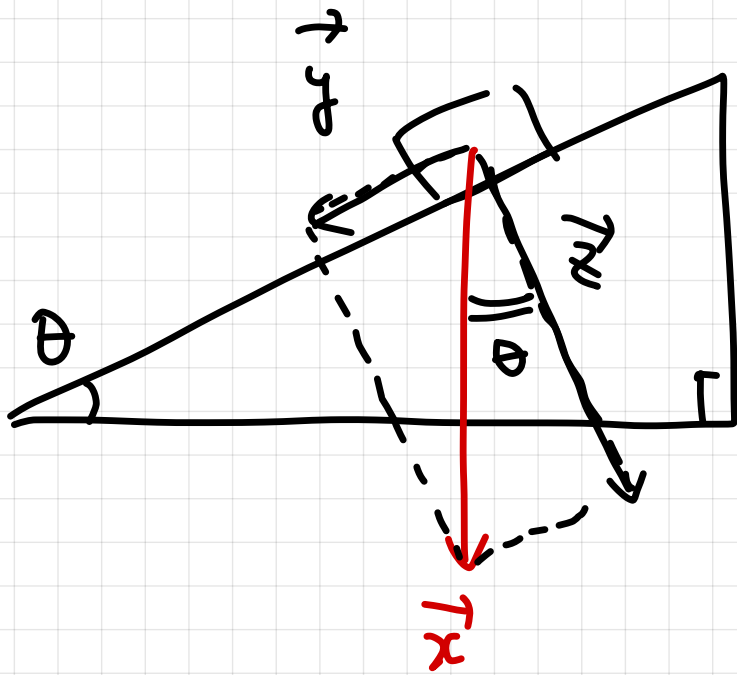
$$\begin{aligned} (3) \vec{AF} &= \vec{x} + 2\vec{y} \end{aligned} \quad \vec{x} \neq \vec{y} \text{ 対称}$$

$$\begin{aligned} (4) \vec{AO} &= 2\vec{AO} \\ &= 2(\vec{x} + \vec{y}) \\ &= 2\vec{x} + 2\vec{y} \end{aligned}$$

3つは  
同じ  
計算する。

$$(5) \vec{CE}$$

$$\begin{aligned} \vec{AC} + \vec{CE} &= \vec{AE} \\ \vec{CE} &= \vec{AE} - \vec{AC} \\ &= (\vec{x} + 2\vec{y}) - (2\vec{x} + \vec{y}) \\ &= -\vec{x} + \vec{y} \end{aligned} \quad \text{対称}$$



$\vec{y}$  &  $\vec{z}$ , 垂直嗎?  
 $|\vec{y}|$ ,  $|\vec{z}|$

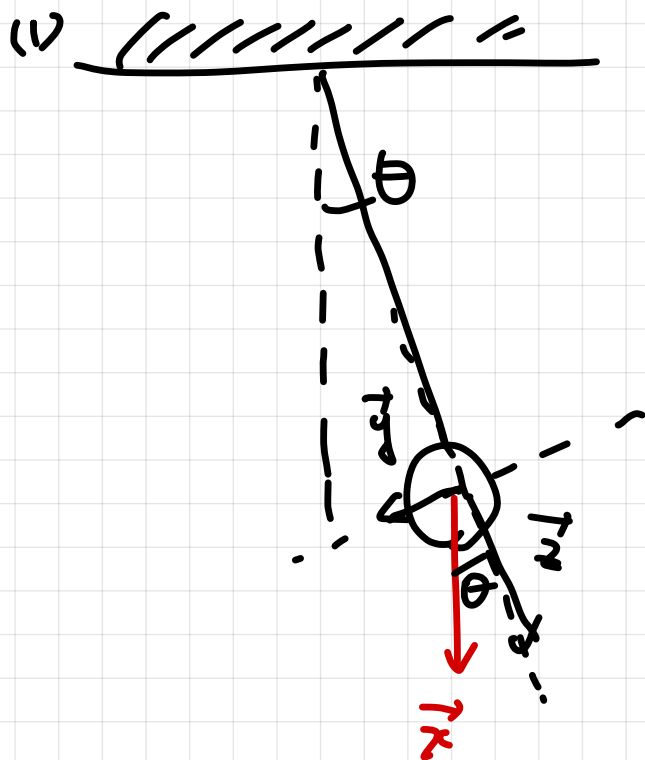
$$|\vec{y}| = |\vec{x}| \cos \theta$$

$$|\vec{z}| = |\vec{x}| \sin \theta$$

$$\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$$

$\vec{x}$  斜向成分  
 $\vec{y}$  斜向垂直成分

# <演習>



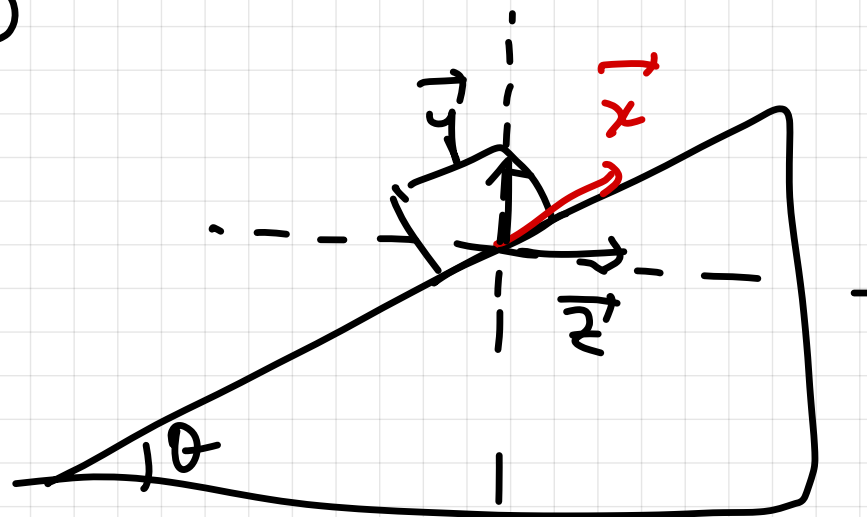
$$|\vec{y}| = |\vec{x}| \sin \theta$$

※ 注意.

$$\Rightarrow |\vec{y}| = |\vec{x}| \sin \theta$$

$$|\vec{x}| = |\vec{y}| \cos \theta$$

(2)

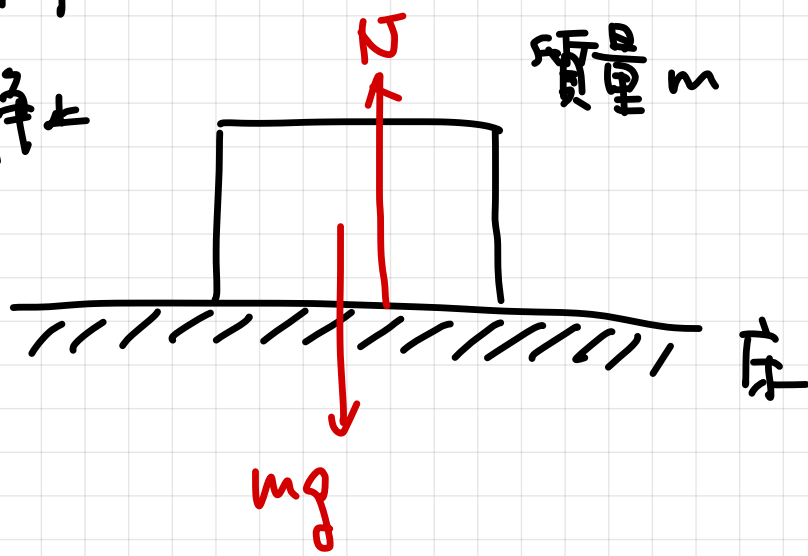


$$\Rightarrow |\vec{y}| = |\vec{x}| \sin \theta$$

$$|\vec{x}| = |\vec{y}| \cos \theta$$

# 力のつり合い

例  
静止



質量があるとき 重力  $mg$  を受ける  
質量 = 重力 + 加速度

$N$ : 垂直抗力 接触しているところから必ず受ける

静止している状態が継続する、  
働いている力を全て足し上げてゼロにする

ベクトル

「合力」

$$mg + N = 0$$

$m$  はベクトルに注意 スカラー  
「大きさのみ」

今回は向きが逆だから  
わかる。大きさの比較  
だけでも十分。

$$|\vec{N}| = N, |\vec{mg}| = mg \text{ とする.}$$

$$N = mg$$

力の図を突壁に引くようにしたのか  
一番大事!!

力の種類を知る

→ 力のつり合いを考える,

\* 注

静止状態にないとは、

回転しないことも条件として  
必要

# 力の種類

(1) 重力  $m\vec{g}$

・ 下向きに働く。

「下」 定義 1 = どちらとも。

・ 重心 1 = 働く。

・ 「質量」 × 「重力加速度」

(2) 垂直抗力  $\vec{N}$

・ 接触しているところから受ける。

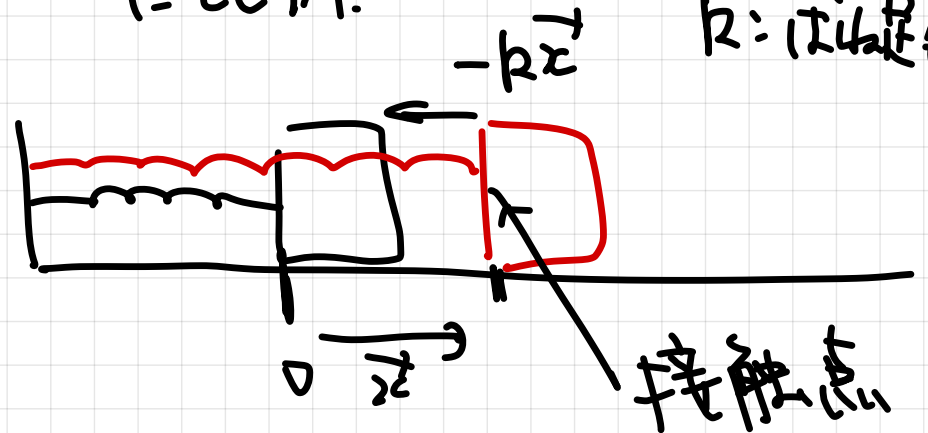
・ 接触面から垂直に。

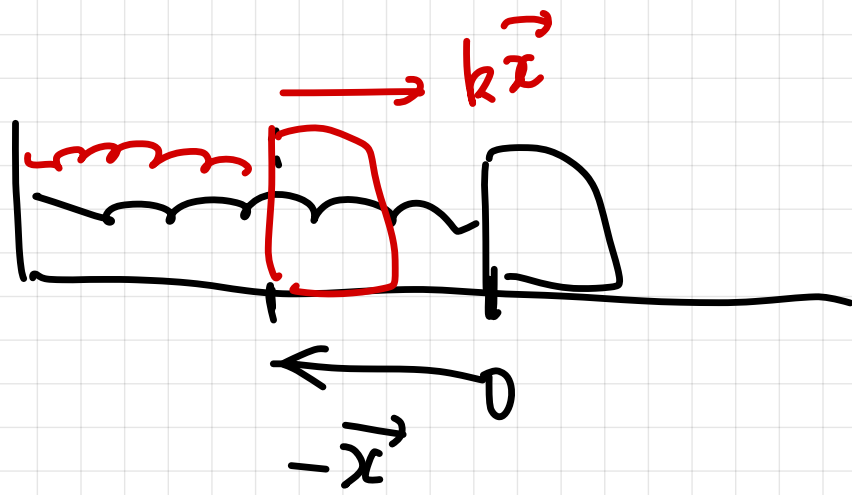
・  $N = 0$  は 接触 → 非接触  
の切りかえ

(3) はばの弾性力  $-kx$

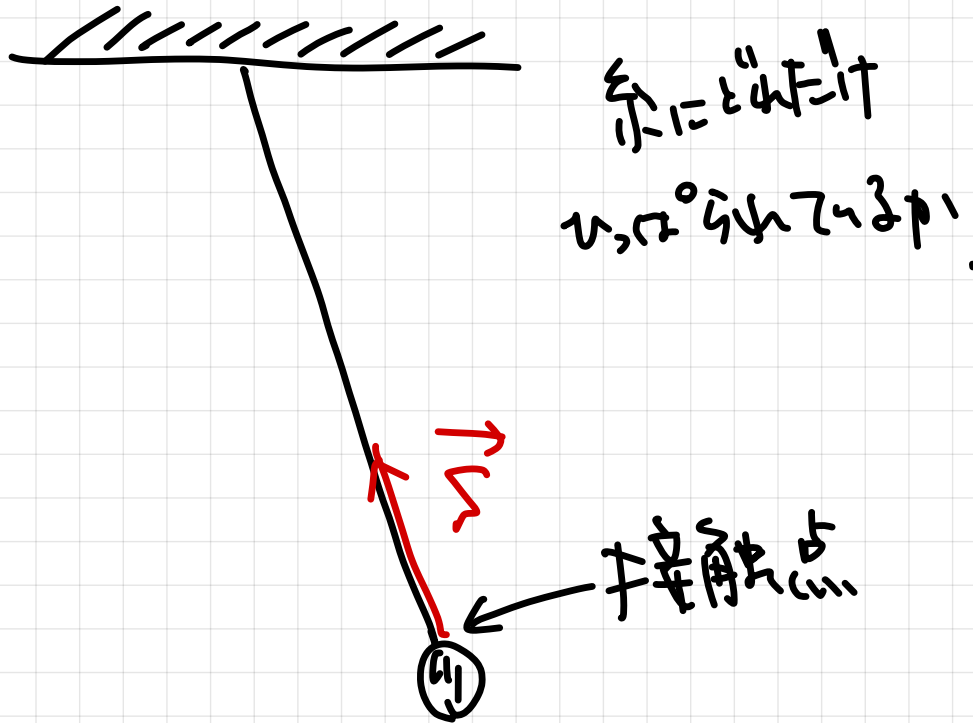
・ 自然長から伸び縮み  
に比例。

$k$ : はば定数

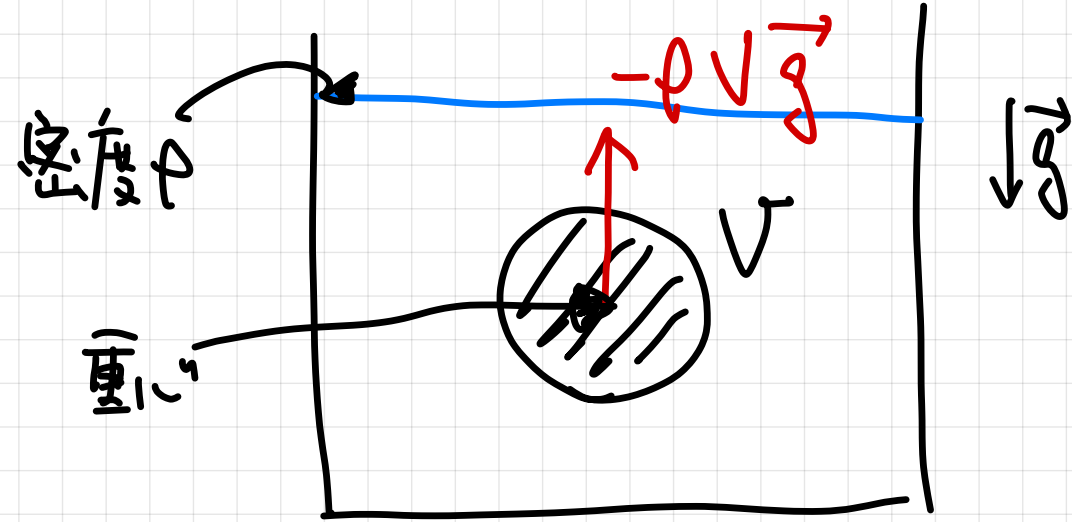




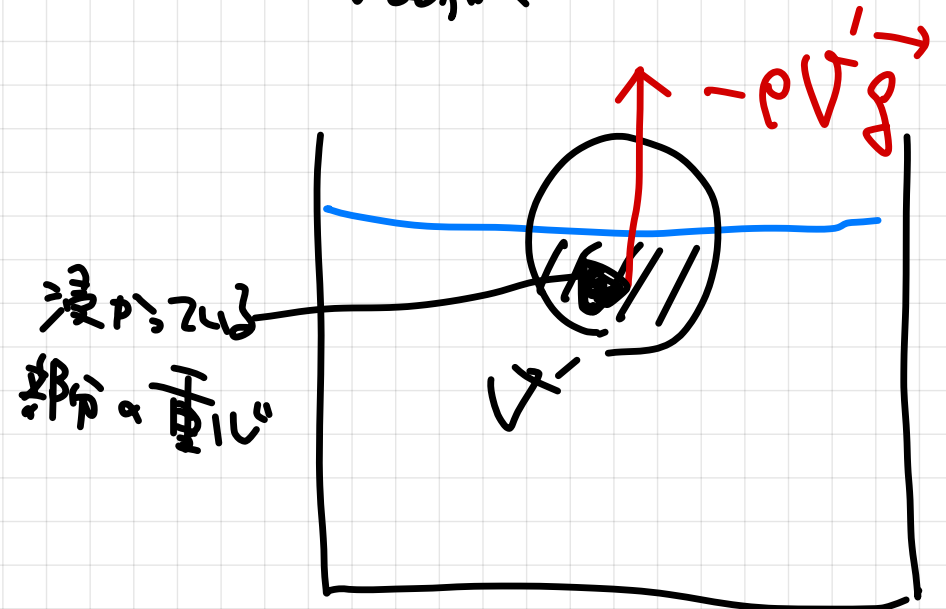
(4) 張力  $\vec{F}$



(5) 浮力  $-\rho V \vec{g}$



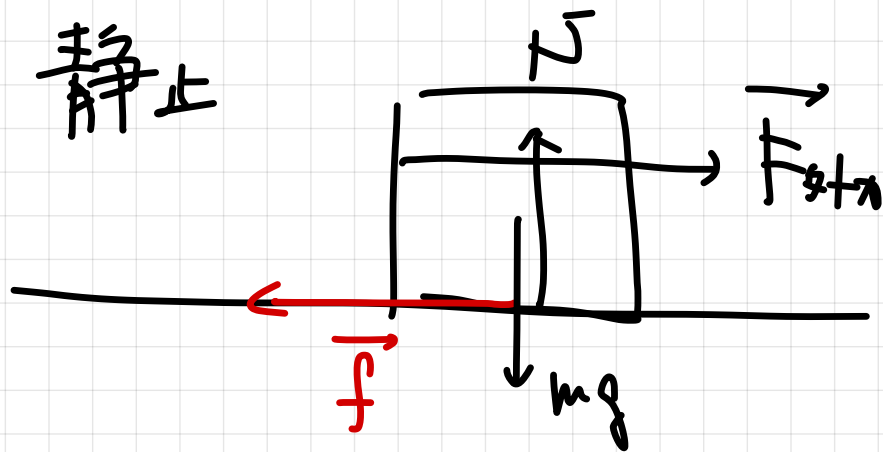
液体と接触している部分



浸っている部分の重心

(b) 摩擦  $\vec{f}$

静止



$|\vec{F}_{\text{appl}}|$  が大きくなる

静止を保つために必要となる。

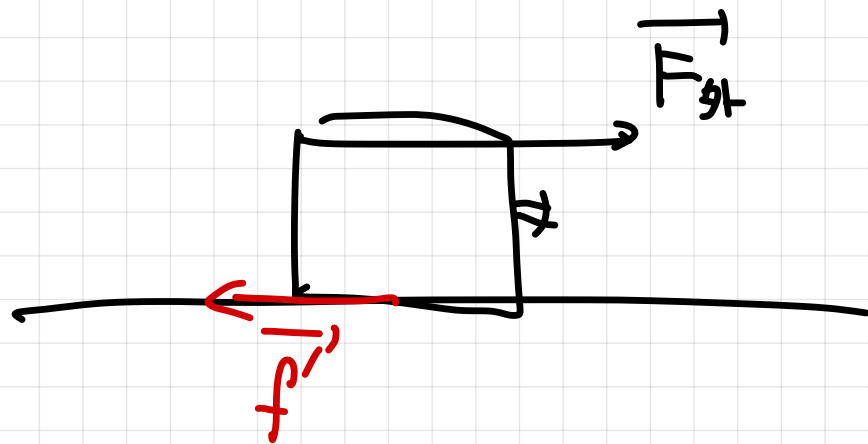
場合.  $|\vec{f}| = |\vec{F}_{\text{appl}}|$

$t = F_{\text{appl}}$

$$|\vec{f}| \leq f_{\text{max}} = \mu N$$

静止摩擦係数 垂直抗力

$|\vec{F}_{\text{appl}}|$  が  $f_{\text{max}} = \mu mg$  を超えると動き出す。



動いているときは、動摩擦  $f'$

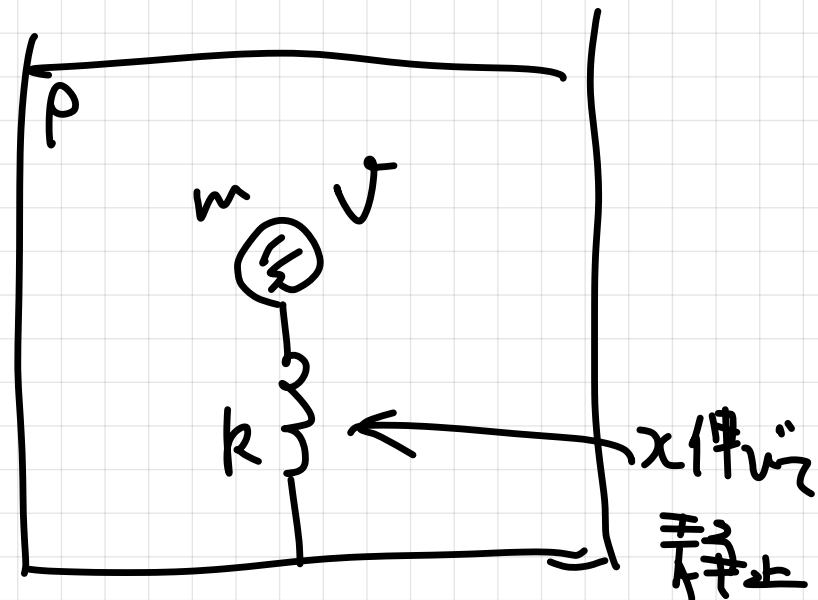
$$f' = \mu' N = \text{垂直抗力}$$

動摩擦係数

動摩擦は、 $\mu'$  と  $N$  だけ決まる。

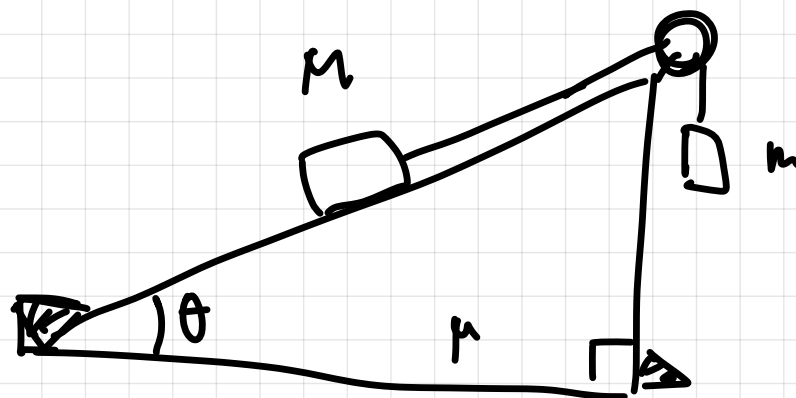
## < 演習 >

(1)

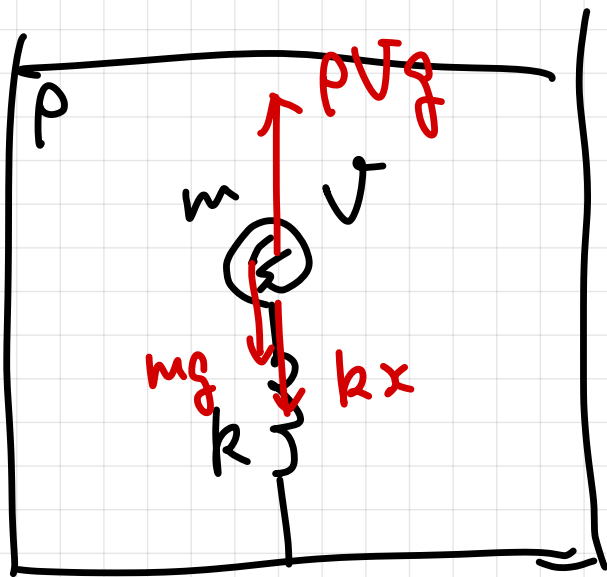


(2)

静止条件  $F_{\text{外}} = ma$



(1)



$$\rho V g = mg + kx$$

$$x = \frac{g}{k} (\rho V - m)$$

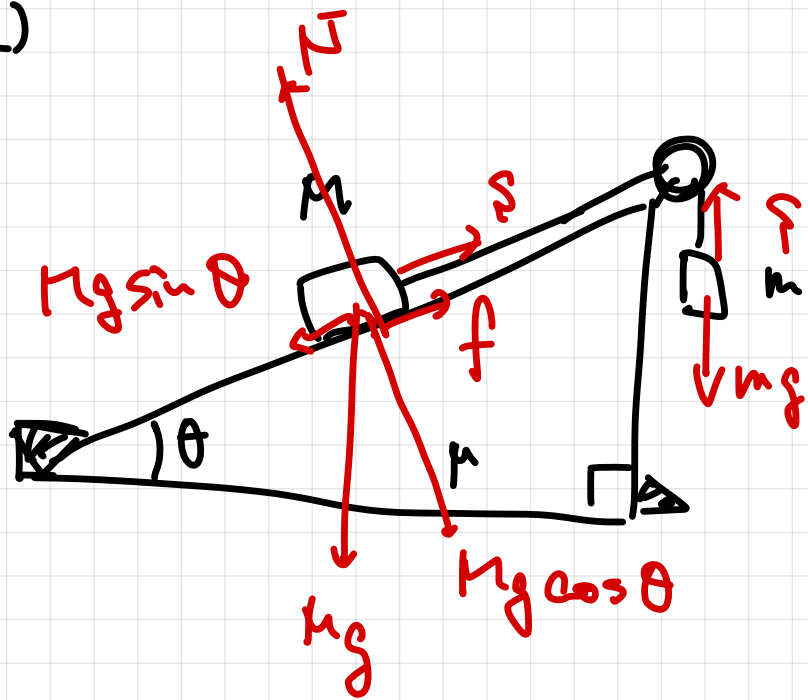
したがって  $m = \rho' V$  物体の密度.

$$x = \frac{Vg}{k} (\rho - \rho')$$

$\rho = \rho'$  とき 浮力と重力が釣り合う.

$\rho > \rho'$  とき 浮力 > 重力 下沉  
 $\rho < \rho'$  とき 浮力 < 重力 上浮

(2)



$$S \pm f = Mg \sin \theta$$

$$\pm f = (Mg \sin \theta - mg)$$

$$f = \pm g (M \sin \theta - m)$$

$$f \leq f_{\max} = \mu Mg \cos \theta$$

$$\pm g (M \sin \theta - m) \leq \mu Mg \cos \theta$$

$$\oplus a \neq \ddot{z}$$

$$M \sin \theta - m \leq \mu M \cos \theta$$

$$M (\sin \theta - \mu \cos \theta) \leq m$$

$$\ominus a \neq \ddot{z}$$

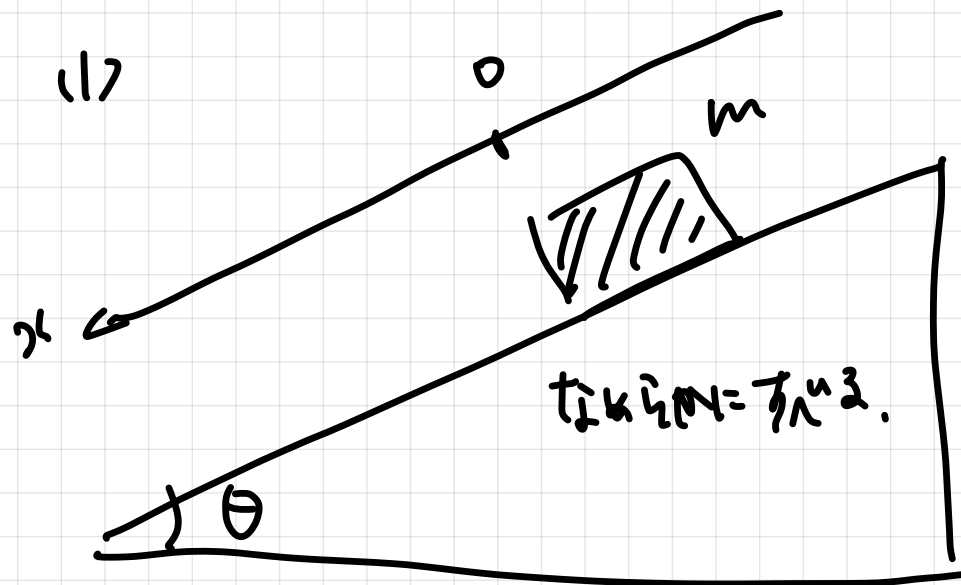
$$m - M \sin \theta \leq \mu M \cos \theta$$

$$m \leq M (\sin \theta + \mu \cos \theta)$$

$$M (\sin \theta - \mu \cos \theta) \leq m \leq M (\sin \theta + \mu \cos \theta)$$

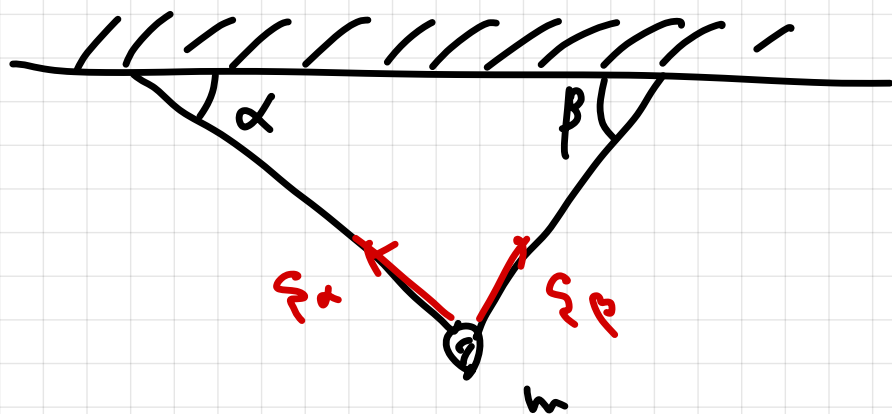
# <演習>

(1)



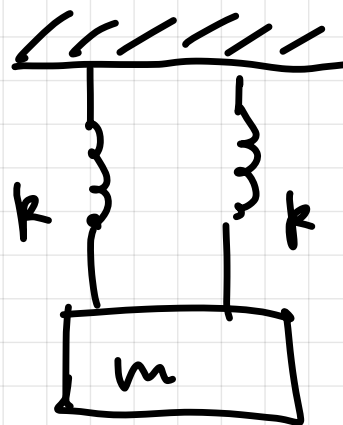
$x(t), v(t), Q(t)$  について.

(2)

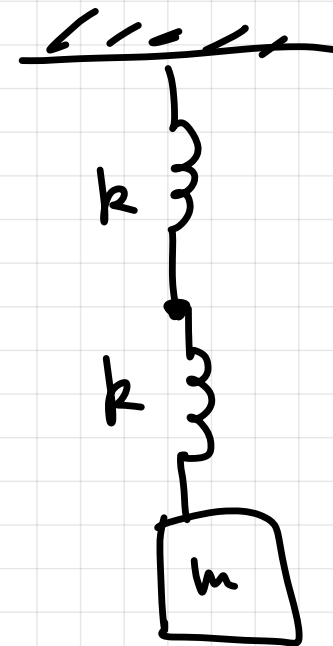


$S_\alpha, S_\beta$  について.

(3)

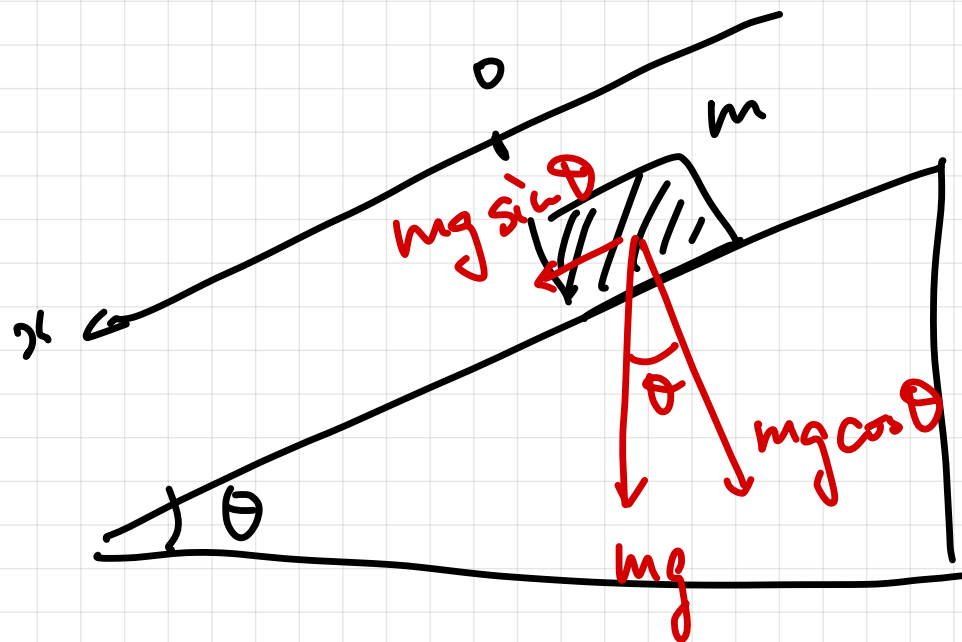


$a v^u, x?$



$a v^u, x?$

(1)



$$mg \sin \theta = ma$$

$$a(t) = g \sin \theta \quad \text{等加速運動}$$

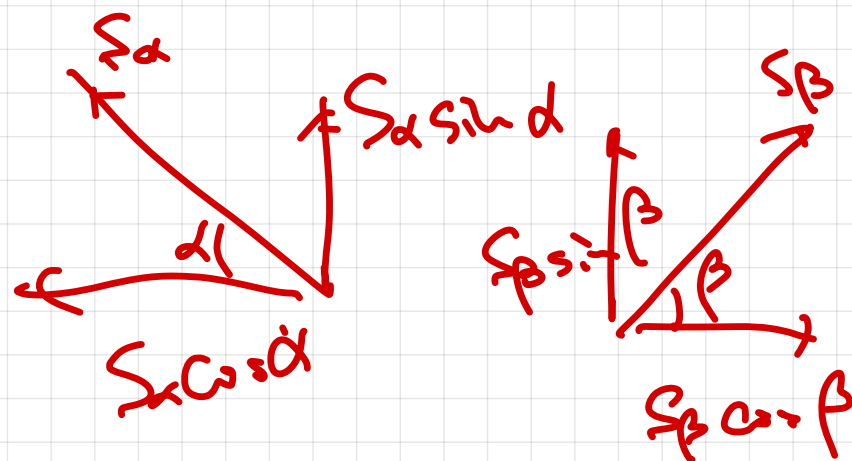
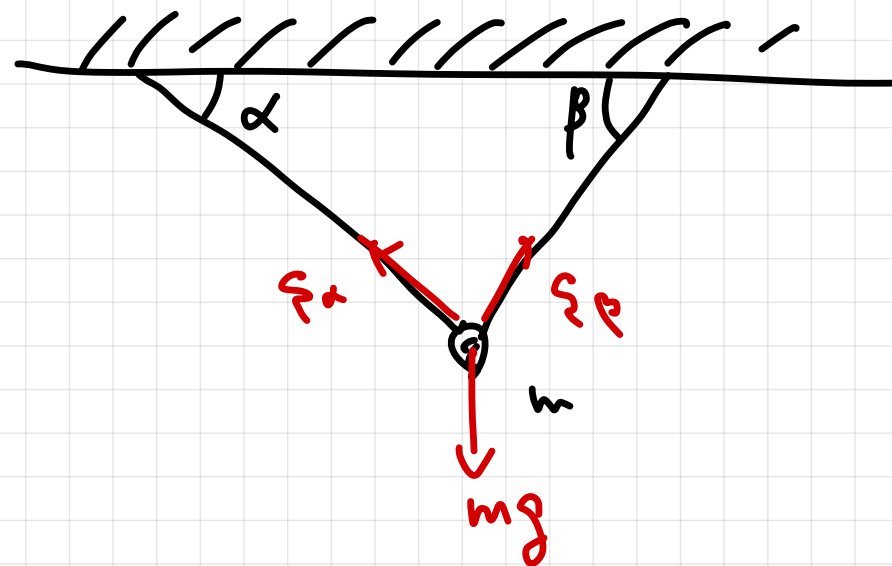
$$v(t) = v(0) + \int_0^t a(t') dt'$$

$$= g \sin \theta \cdot t$$

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t') dt'$$

$$= \frac{1}{2} g \sin \theta \cdot t^2$$

(2)



上下平衡

$$S_{\alpha} \sin \alpha + S_{\beta} \sin \beta = mg$$

水平

$$S_{\alpha} \cos \alpha = S_{\beta} \cos \beta$$

$$S_{\beta} = S_{\alpha} \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$$

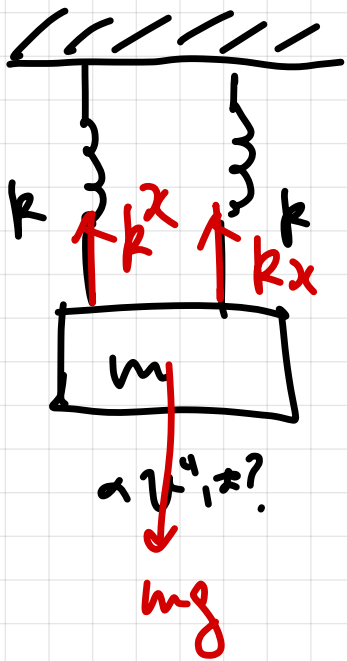
$$S_{\alpha} \sin \alpha + S_{\alpha} \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \sin \beta = mg$$

$$S_{\alpha} \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \beta} = mg$$

$$S_{\alpha} = \frac{mg \cos \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}$$

$$S_{\beta} = \frac{mg \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}$$

$\alpha \leftrightarrow \beta$  对称性

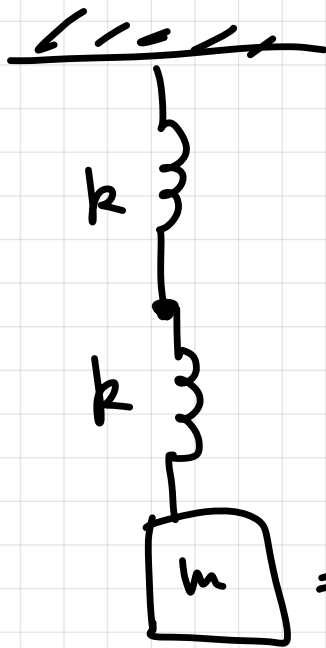


$$2kx = mg$$

$$x = \frac{mg}{2k}$$



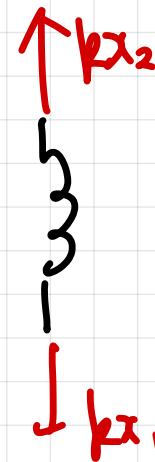
$$k \rightarrow 2k$$



$$x_1 = \frac{mg}{k}$$

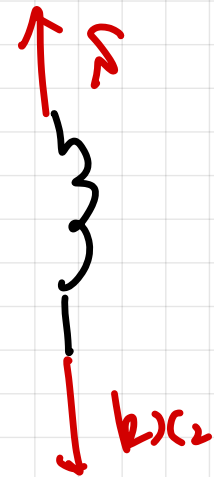
At  $z$

$$k \rightarrow \frac{k}{2}$$



$$x_1 = x_2$$

$$x_1 + x_2 = \frac{2mg}{k} \text{ or } x_1$$



## < 目標 4. >

$$\cdot \vec{F}(t) = m \vec{a}(t)$$

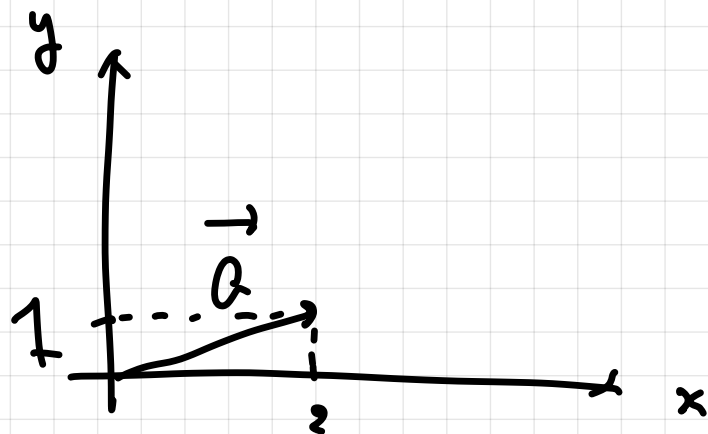
$$\Rightarrow \vec{x}(t) = \square$$

$$\cdot m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \text{const.}$$

\* 3次元運動 (角速度  $\vec{\omega}$  と位置  $\vec{r}$  は平面内なため)

\* 衝突, 分裂, 合体

ベクトル = 成分表示.



$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} x \text{ 成分} \\ y \text{ 成分} \end{matrix}$$

"2次元空間を表現する"

$$\vec{Q} = (2, 1)$$

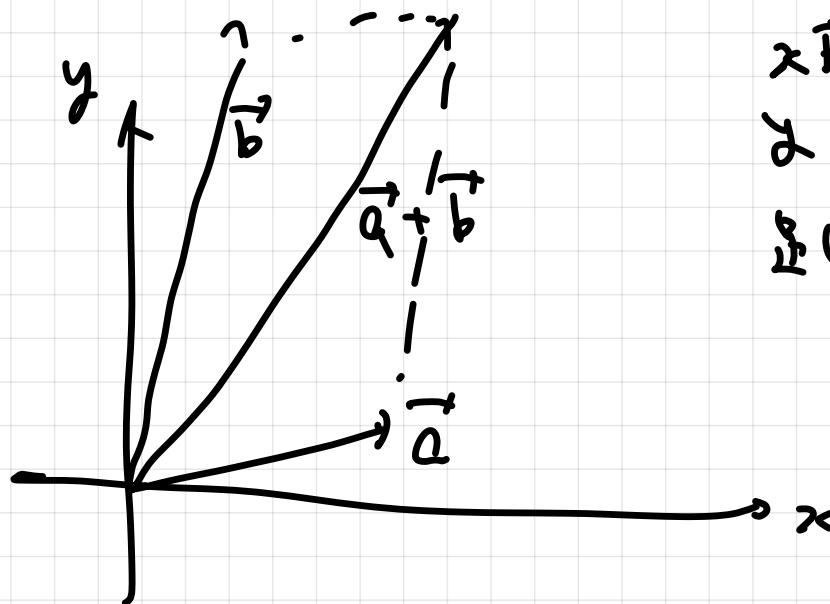
2次元空間を表現する

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad a \neq \pm 1$$

$$\vec{Q} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 + 1 \\ 1 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2次元空間  
の  
基底



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$$

A, B (定数)

⇓

$$A\vec{a} + B\vec{b} = A \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Aa_x \\ Aa_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Bb_x \\ Bb_y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Aa_x + Bb_x \\ Aa_y + Bb_y \end{pmatrix}$$

3成分で4成分だと同じように  
→ できる。

例

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2成分  
3成分

1.  $2\vec{a} - \vec{b}$ , 2.  $-\vec{a} + 3\vec{b}$

$$2\vec{a} - \vec{b} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

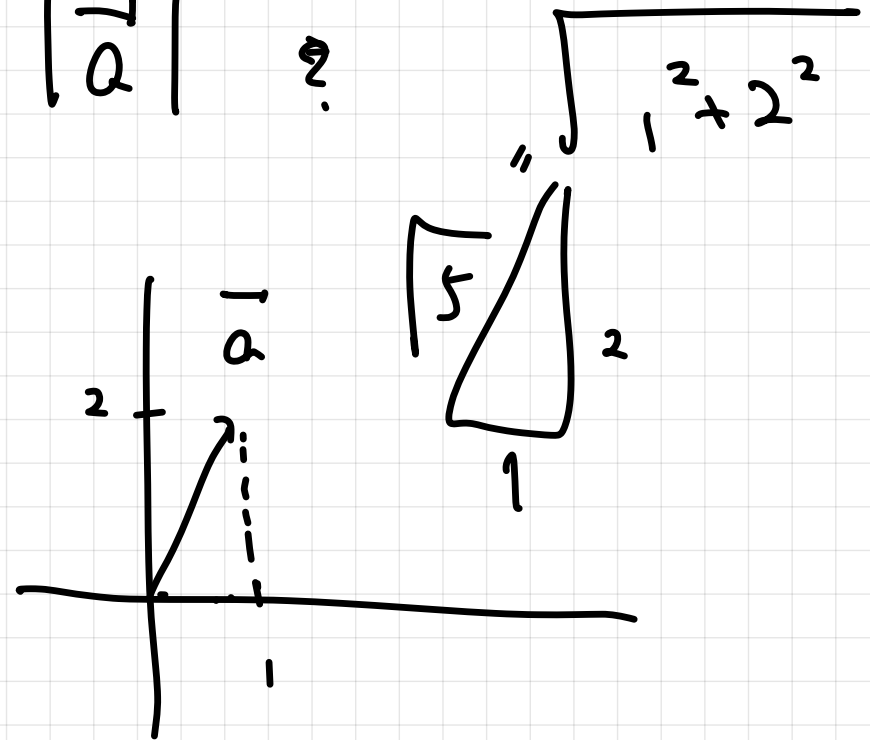
$$2. \quad -\vec{a} + 3\vec{b} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad a = \sqrt{5}$$

$$|\vec{a}| \quad ?$$



$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

3次元

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

⋮

n次元

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2 + a_n^2}$$

\*

0 は 成分

$\vec{0}$  は  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  かもしれない。

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

"

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

"

## ベクトルと時間微分・積分

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 \end{pmatrix} \text{ かつ}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}(2t) \\ \frac{d}{dt}(t^2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2t \end{pmatrix}$$

成分は2に微分すればOK

## 積分も同じ

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{x}(t) dt$$

$$= \begin{pmatrix} \int_{t_1}^{t_2} 2t dt \\ \int_{t_1}^{t_2} t^2 dt \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t_2^2 - t_1^2 \\ \frac{1}{3}(t_2^3 - t_1^3) \end{pmatrix}$$

## <練習>

$$(1) \quad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} At^2 \\ Bt \end{pmatrix} \quad a \neq f$$

$$\dot{\vec{x}}(t), \quad \ddot{\vec{x}}(t) \neq ?$$

$$(2) \quad \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad a \neq f$$

$$\vec{v}(t) = \int_0^t \vec{a}(t') dt'$$

$$\vec{x}(t) = \int_0^t \vec{v}(t') dt' \quad \neq ?$$

$$4/ \quad \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 2At \\ B \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 2A \\ 0 \end{pmatrix}$$

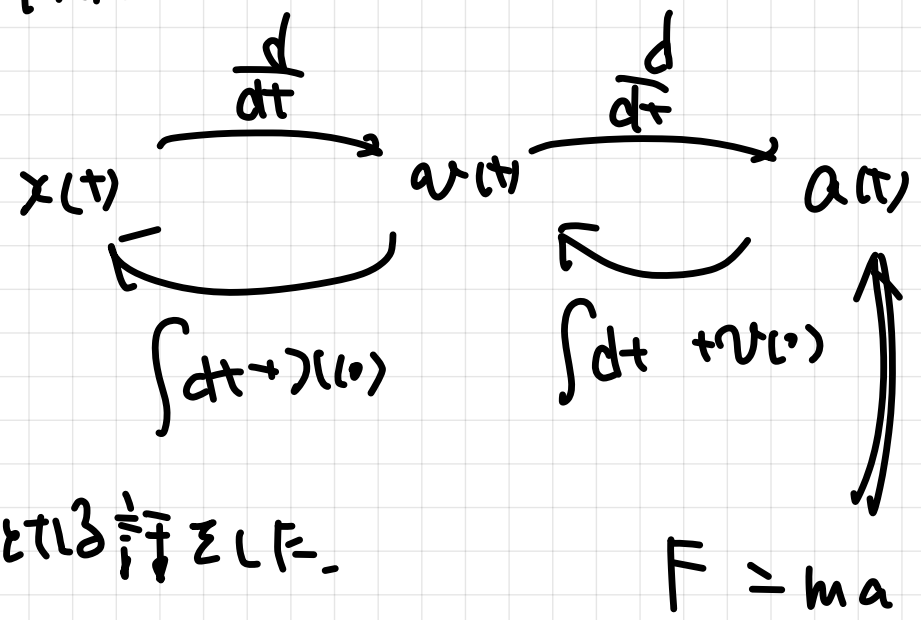
$$(2) \quad \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t 0 dt' \\ -\int_0^t g dt' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -gt \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t 0 \, dt' \\ -\int_0^t g t' \, dt' \end{pmatrix}$$

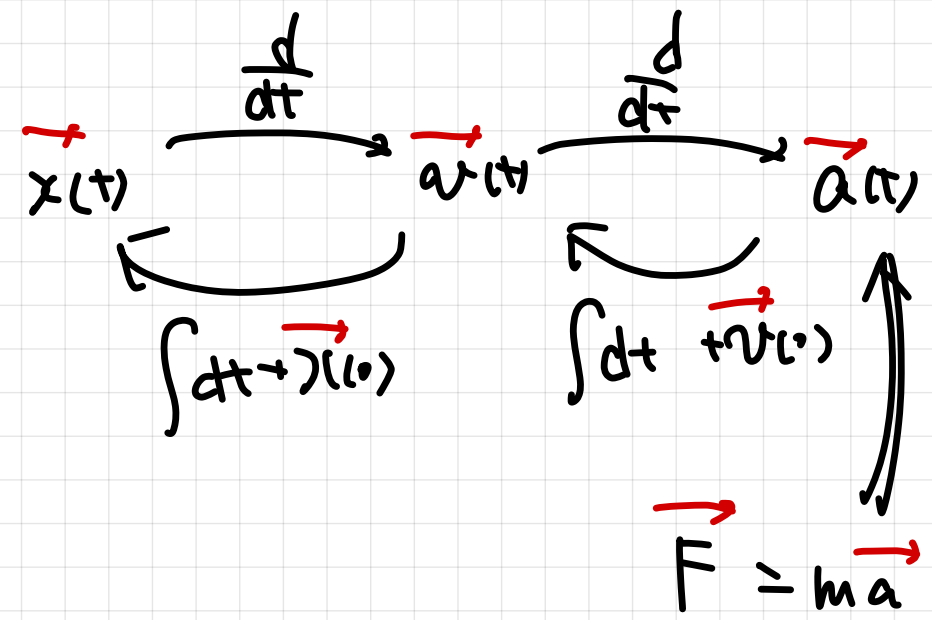
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{g t^2}{2} \end{pmatrix}$$

# ベクトル表示、運動方程式

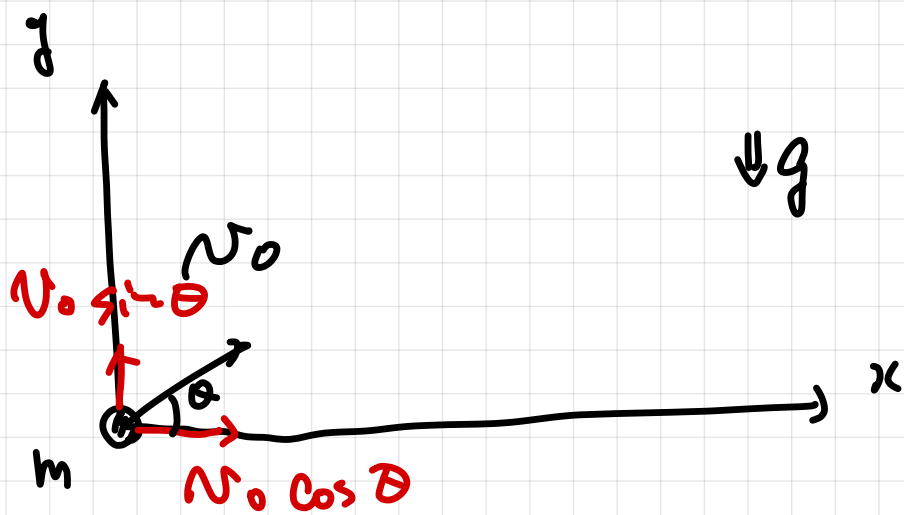
1次元上2"



2次元上2"



1次元上2" / 全 < 1次元



$$\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} v_0 \cos \theta \\ v_0 \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} = m \vec{a}(t)$$

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

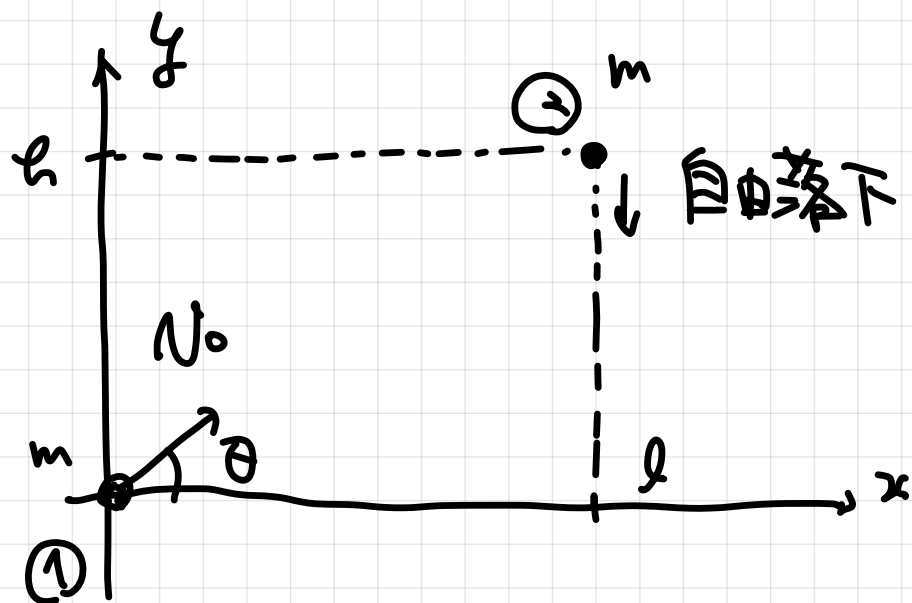
$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(t') dt' \\ &= \begin{pmatrix} v_0 \cos \theta \\ v_0 \sin \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -gt \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} v_0 \cos \theta \\ v_0 \sin \theta - gt \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \vec{x}(0) + \int_0^t \vec{v}(t') dt' \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_0 \cos \theta t \\ v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} v_0 \cos \theta t \\ v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}$$

# < 演習 >



theta を決める条件を求め、求めよ。

① 1次元運動。

$$\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos \theta t \\ v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} l \\ h - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}$$

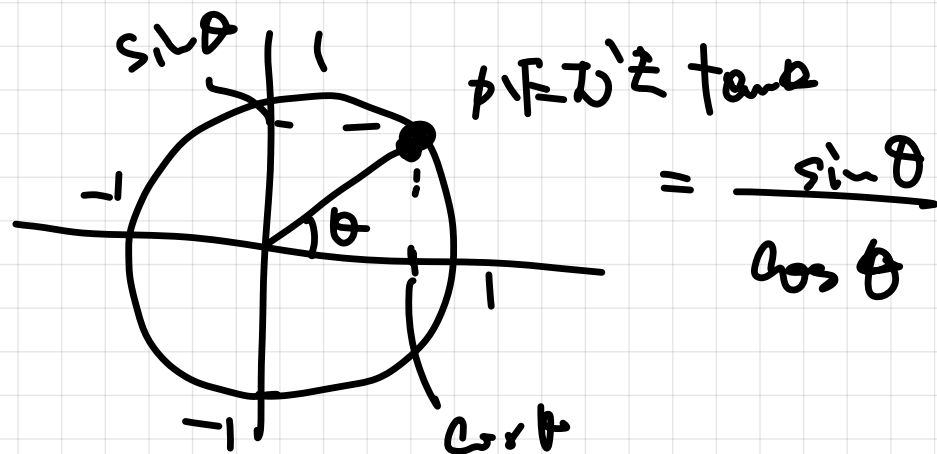
$$t = \tilde{t} \text{ かつ } \vec{x}_1(\tilde{t}) = \vec{x}_2(\tilde{t}) \text{ となる。}$$

$$\begin{pmatrix} v_0 \cos \theta \tilde{t} \\ v_0 \sin \theta \tilde{t} - \frac{1}{2} g \tilde{t}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \\ h - \frac{1}{2} g \tilde{t}^2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{t} = \frac{l}{v_0 \cos \theta}$$

$$v_0 \sin \theta \cdot \frac{l}{v_0 \cos \theta} = h$$

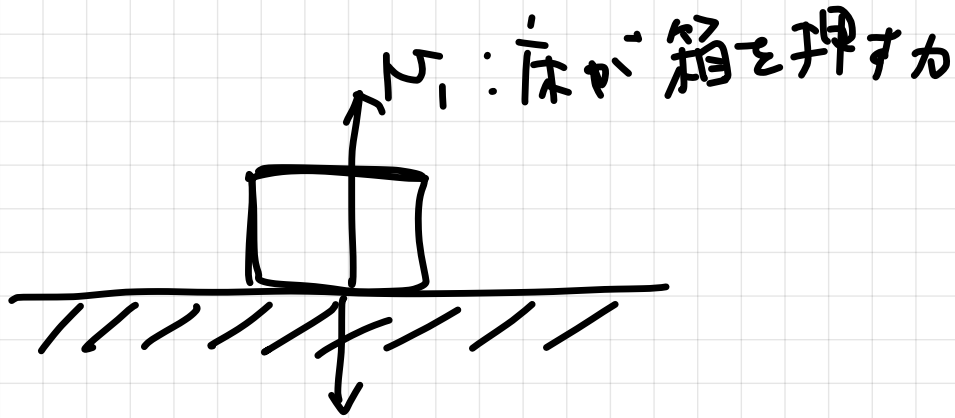
$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \geq \frac{h}{l}$$



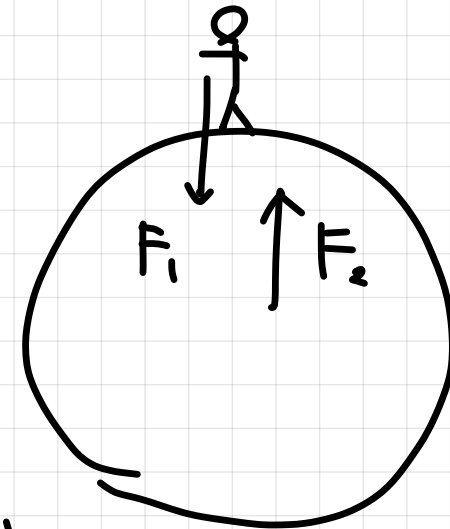
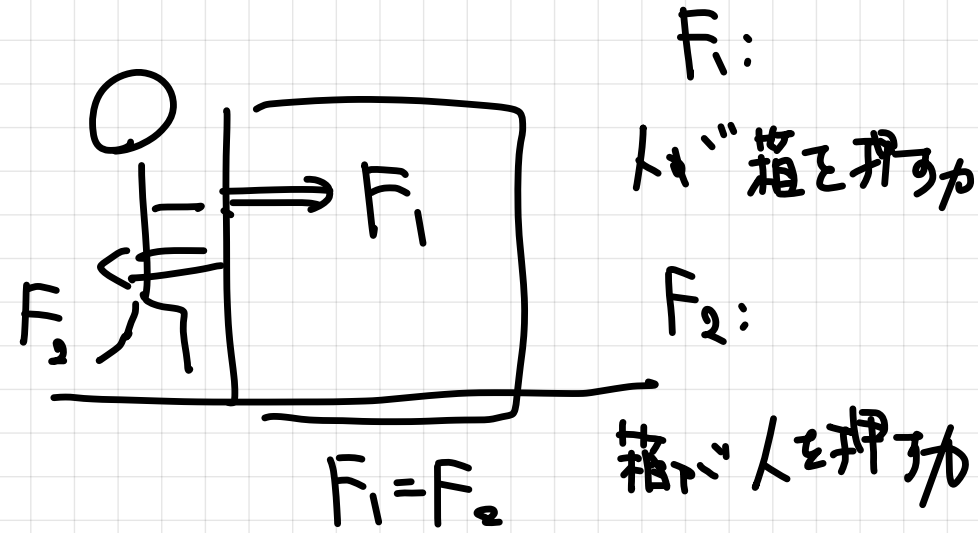
$$\tan \theta = \frac{p}{b}$$

$$\tan \theta = \frac{p}{b} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

# 作用・反作用の法則



$N_1 = N_2$       作用・反作用



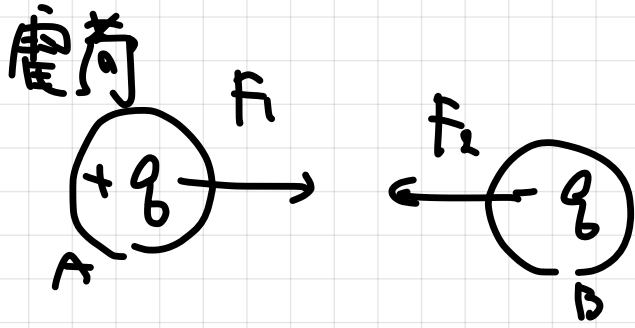
$F_1$ : 地球が'人'を  
引く力

$F_2$ : '人'が  
地球を引く力

接触面

2点に2力は  
限られ

$F_1 = F_2$



$F_1$ : BがAに及ぼす力

$F_2$ : AがBに及ぼす力

非接触でも作用・反作用の法則

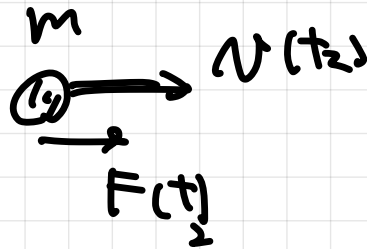
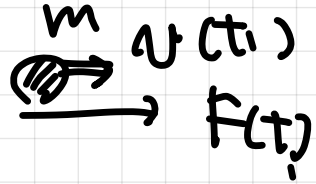
作用・反作用の法則は

「原理」

「原理: 理論を展開するとき  
基本・根本となる考え方を  
スタート地点

( 色々な実験をしてみても  
まずそこからいかなきゃと考えると  
スタート地点となる )

# 力積と運動量



運動方程式

$$m \vec{a}(t) = \vec{F}(t)$$

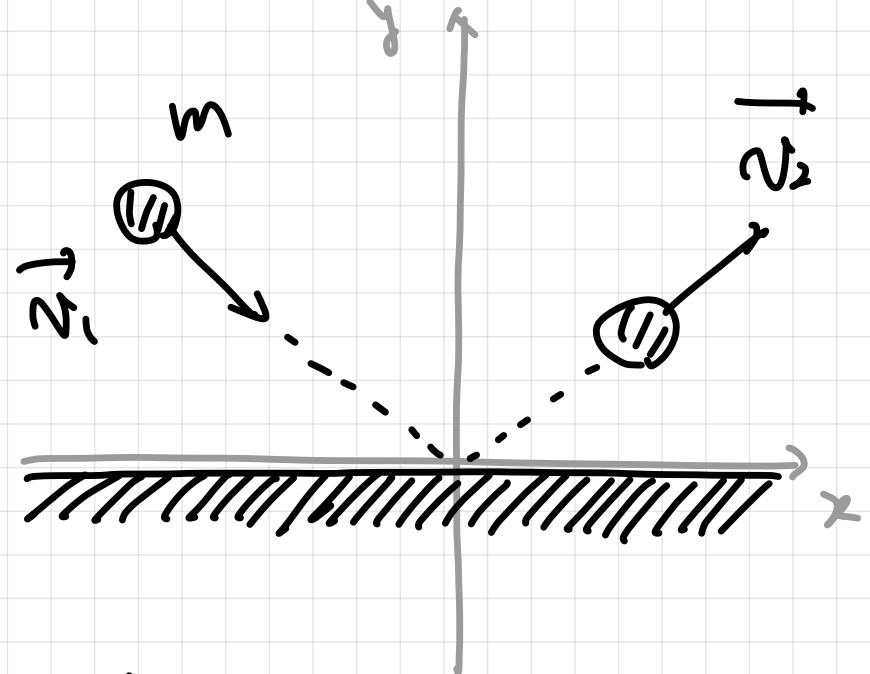
$$m \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt$$

$$m \vec{v}(t_2) - m \vec{v}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt$$

時刻  $t_2$  での運動量

力積

運動量の变化 = 力積



$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} v \\ -v \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} v \\ +v \end{pmatrix}$$

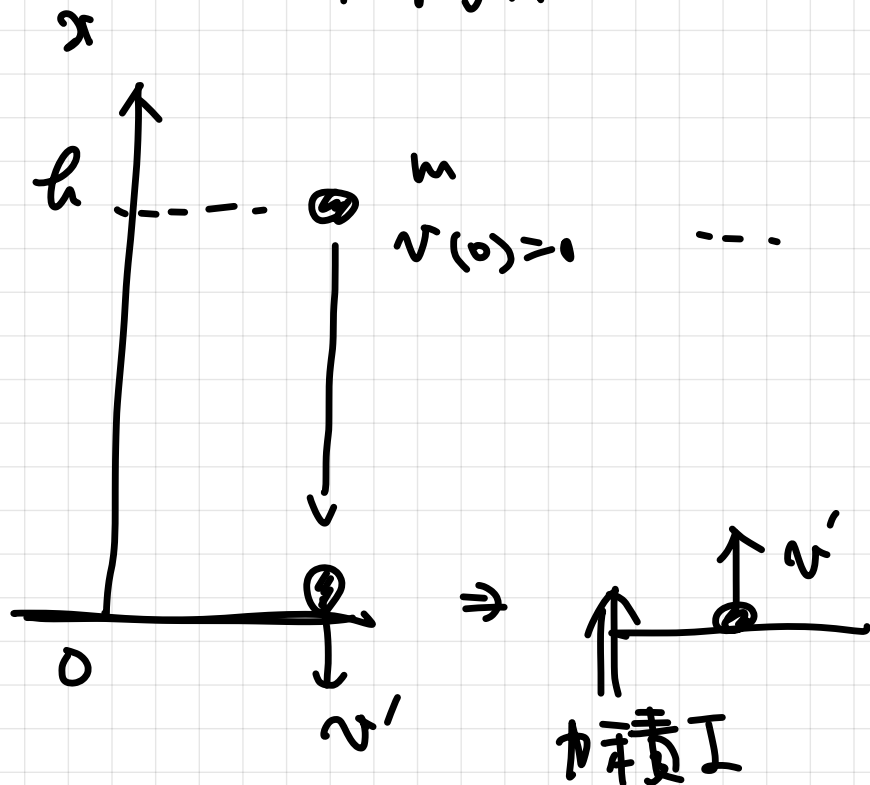
力積は?

$$\Rightarrow m \vec{v}_2 - m \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2mv \end{pmatrix}$$

# 質点と壁の衝突 (はね返り係数)

「はね返り」の前後で速度からたずね

⇒ 弾性衝突



どうして戻る?

$$h - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$at = -g \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh}$$

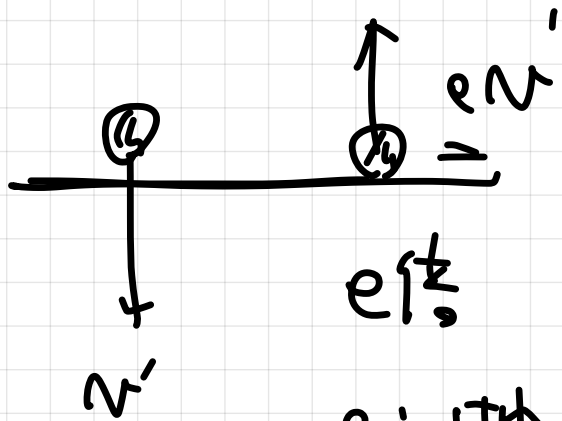
$$v' = \sqrt{2gh}$$

$$I \text{ (Impulse)} = m\sqrt{2gh} - m(-\sqrt{2gh})$$

$$= 2\sqrt{2} m\sqrt{gh}$$

$$v' - gt' = 0 \rightarrow t' = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\frac{1}{2}gt'^2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{2h}{g} = \underline{\underline{h}}$$



$e$ : 弾性係数

$e = 1$  : (完全) 弾性衝突

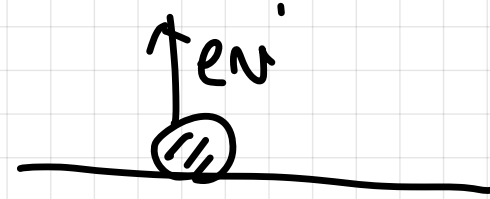
$0 < e < 1$  : 非弾性衝突

$e = 0$  : 完全非弾性衝突

$e$  は何で決まる?

$$ev' - gt' = 0$$

$$t' = \frac{ev'}{g}$$



$$\frac{1}{2} \cdot g t'^2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{e^2}{g^2} \cdot 2gh$$

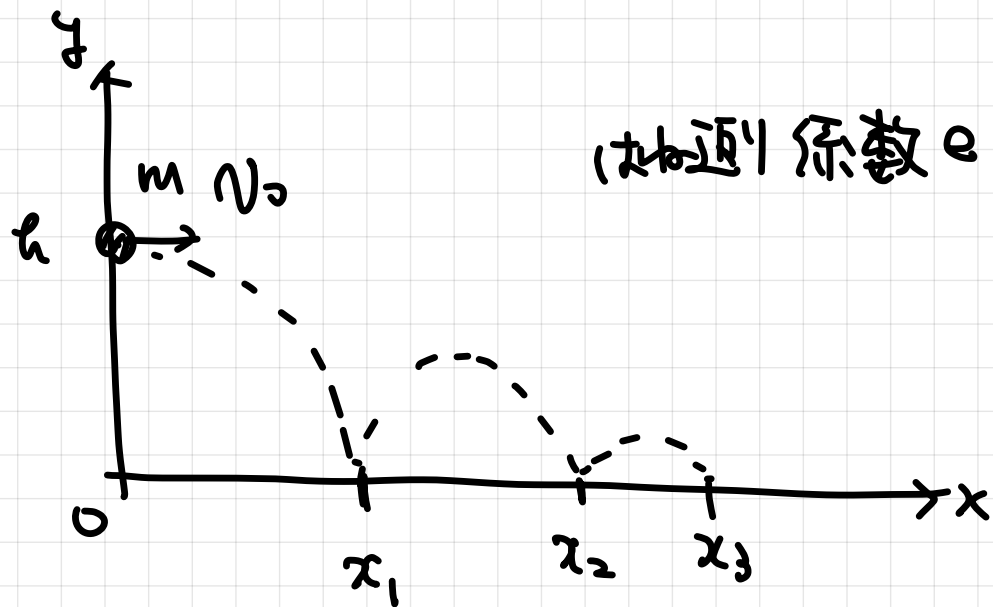
$$= e^2 h < h$$

加積

$$I = mev' - m(-v)$$

$$= (e+1)m\sqrt{2gh}$$

# < 演習 > (1)



1 回目、衝突直前  $\vec{v}(t_1)$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t') dt'$$

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

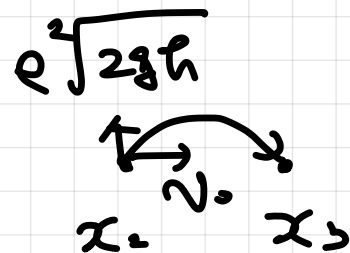
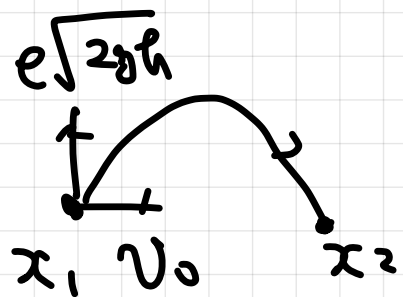
$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -gt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ -gt \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} v_0 t \\ -\frac{1}{2}gt^2 + h \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}(t_1) = \begin{pmatrix} v_0 t_1 \\ -\frac{1}{2}gt_1^2 + h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad x_1 = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\vec{v}(t_1) = \begin{pmatrix} v_0 \\ -\sqrt{2gh} \end{pmatrix}$$



$$e^2\sqrt{2gh} - g\Delta t' = 0$$

$$\Delta t' = e^2\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$e\sqrt{2gh} - g\Delta t = 0$$

$$\Delta t = e\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

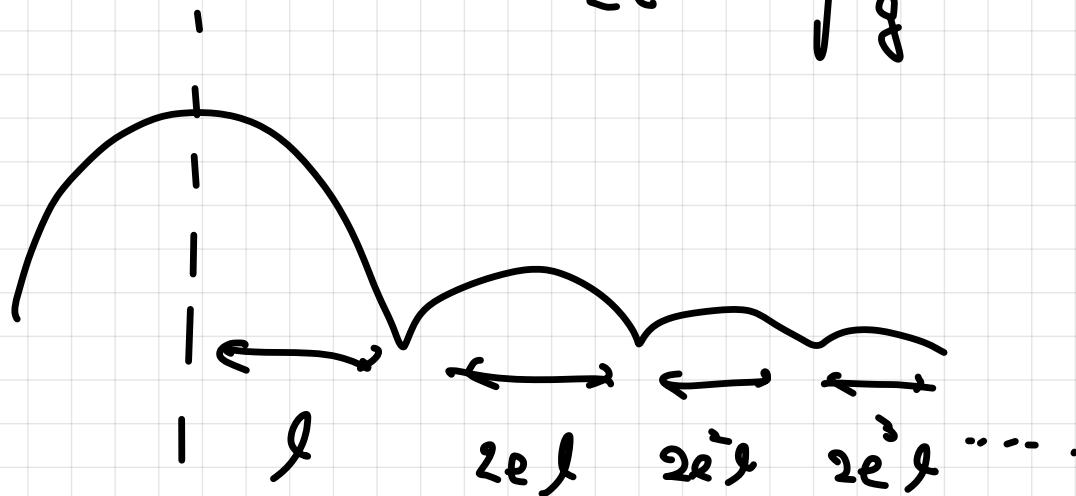
$$x_2 - x_1 = v_0 \times 2\Delta t'$$

$$= 2e^2 v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$x_2 - x_1$$

$$= v_0 \times 2\Delta t$$

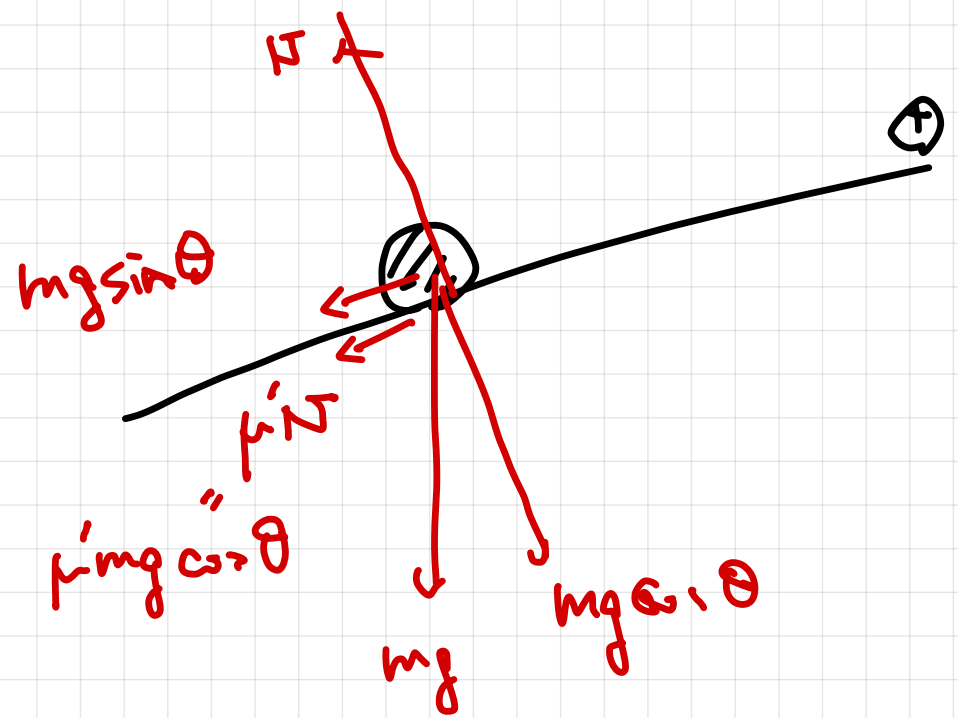
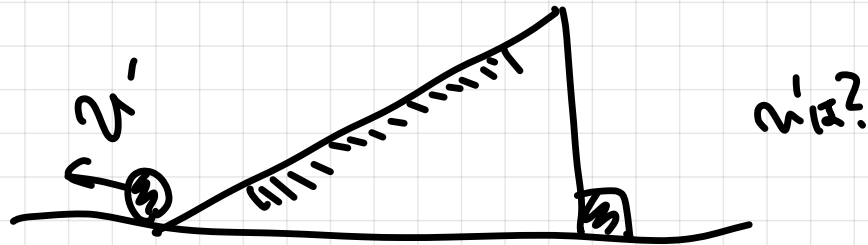
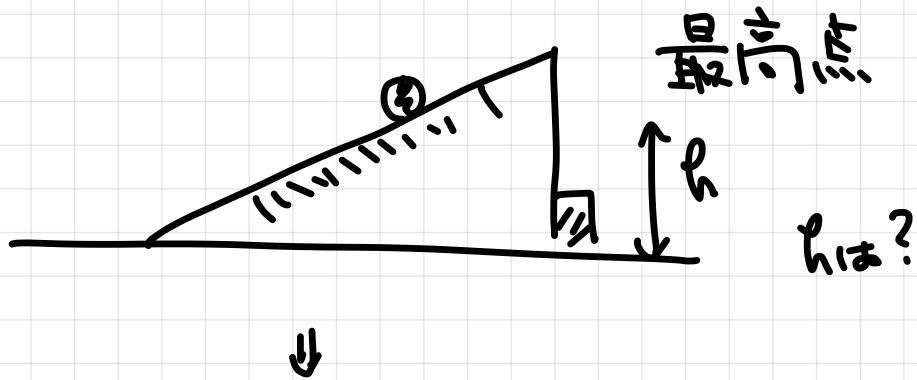
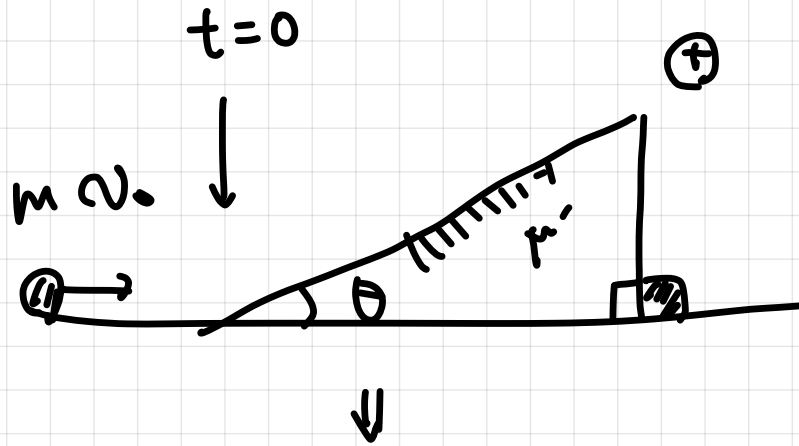
$$= 2e v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$



$$l = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

2322

(2)



$$ma = -\mu' mg \sin \theta - \mu' mg \cos \theta$$

$$= -g (\sin \theta + \mu' \cos \theta)$$

$$v(t) = v_0 - g (s + \mu' c) t$$

$$v(t_1) = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{v_0}{g(s + \mu' c)}$$

$$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g (s + \mu' c) t^2$$

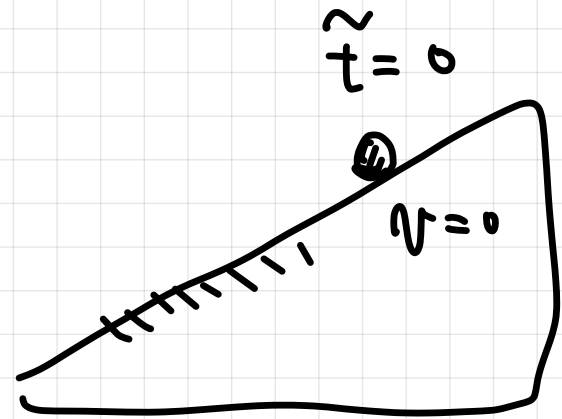
$$\begin{aligned} x(t_1) &= v_0 \frac{v_0}{g(s + \mu' c)} - \frac{1}{2} g \frac{(\cancel{s + \mu' c}) \cdot v_0^2}{g^2 (s + \mu' c)^2} \\ &= \frac{v_0^2}{2g(s + \mu' c)} \end{aligned}$$

$$h = x(t_1) \sin \theta$$

$$= \frac{v_0^2 \sin \theta}{2g(\sin \theta + \mu' \cos \theta)}$$

\*  $\theta = \frac{\pi}{2}$  のとき 垂直に投げ上げたときと同じ

$t \geq t_1$  のとき  
垂直摩擦の向きが変わる



$$\begin{cases} v(\tilde{t}) = -g(s - \mu' c) \tilde{t} \\ x(\tilde{t}) = x(t_1) - \frac{1}{2} g(s - \mu' c) \tilde{t}^2 \end{cases}$$

$$x(\tilde{t}_1) = 0$$

$$x(t_1) - \frac{1}{2} g(s - \mu' c) \tilde{t}_1^2 = 0$$

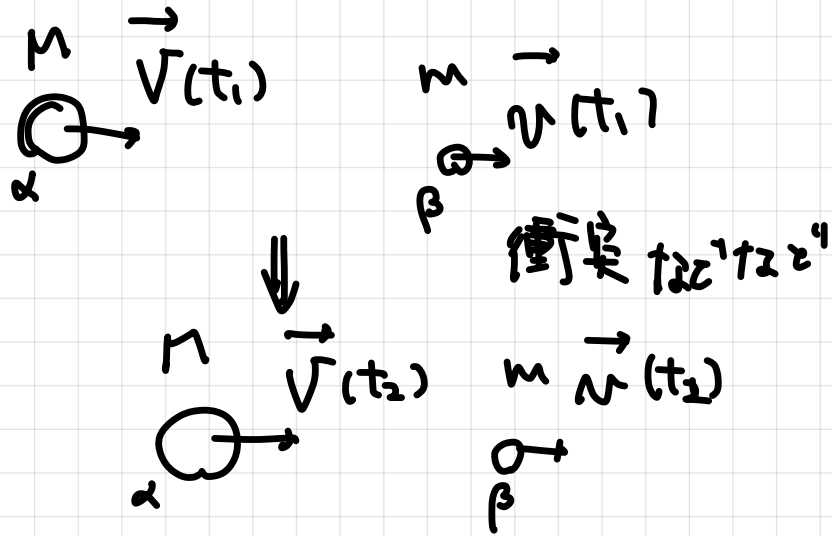
$$\tilde{t}_1 = \sqrt{\frac{2x(t_1)}{g(s - \mu' c)}}$$

$$\begin{aligned}
v' &= -v(\hat{t}_1) \\
&= g(s - \mu'c) \cdot \sqrt{\frac{2x(t)}{g(s - \mu'c)}} \\
&= \sqrt{\frac{2g(s - \mu'c) \cdot \frac{v_0^2}{2g(s + \mu'c)}}{2g(s - \mu'c)}} \\
&= v_0 \sqrt{\frac{\sin\theta - \mu'\cos\theta}{\sin\theta + \mu'\cos\theta}} < v_0
\end{aligned}$$

はね返り係数  $< 1$

$e < 1 \Rightarrow$  摩擦でエネルギー  
が減少した わけ

## 2物体間、運動量、保存



$t_1 \sim t_2$  の間の任意  $t$

$$M \vec{A}(t) = \vec{F}^{\beta \rightarrow \alpha}(t)$$

時間積分  
 $t_1 \sim t_2$

$$M \vec{V}(t_2) - M \vec{V}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}^{\beta \rightarrow \alpha}(t) dt = \vec{I}$$

$$m \vec{v}(t_2) - m \vec{v}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}^{\alpha \rightarrow \beta}(t) dt = -\vec{I}$$

作用・反作用の法則.

$$\vec{F}^{\beta \rightarrow \alpha}(t) = -\vec{F}^{\alpha \rightarrow \beta}(t)$$

\* 接触、非接触に依らず.

$$\begin{aligned} & M \vec{V}(t_2) - M \vec{V}(t_1) \\ & + m \vec{v}(t_2) - m \vec{v}(t_1) = \vec{0} \\ \hline & M \vec{V}(t_2) + m \vec{v}(t_2) \\ & = M \vec{V}(t_1) + m \vec{v}(t_1) \end{aligned}$$

「外力がはたいていないとき」  
をさく使う



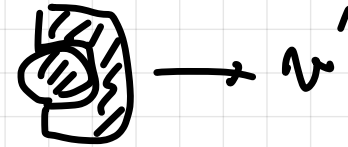
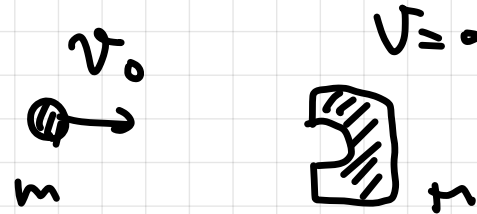
「作用・反作用」  
が「消えてくるとき」

運動量は保存

$$M \vec{V}(t) + m \vec{v}(t) = \text{定数}$$

## < 演習 >

(1)



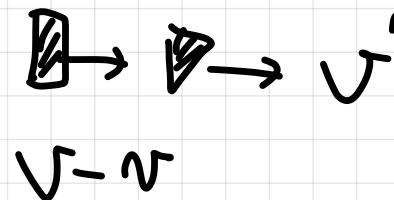
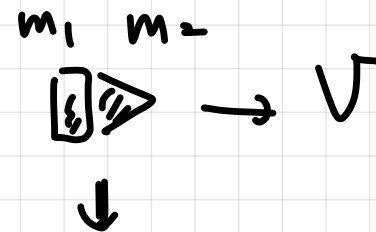
$v'$ は何?

$$m v_0 + M \cdot 0 = (m+M) v'$$

$$v' = \frac{m v_0}{m+M}$$

全体

(2)



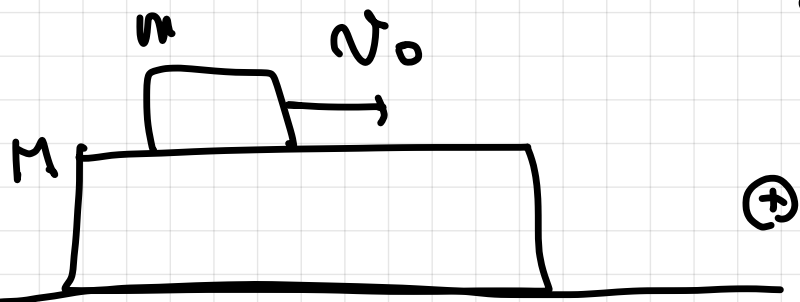
$$(m_1 + m_2) V' = m_1 (V - v) + m_2 V'$$

$$V' = V + \frac{m_1}{m_2} v$$

分34

(3)

↓ g

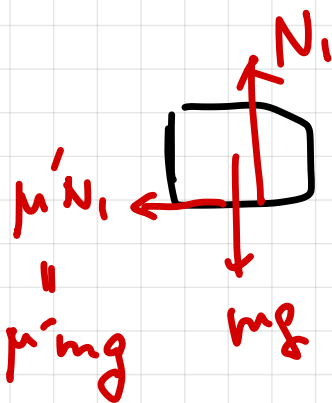


静止

m - m 質量 μ' 摩擦係数

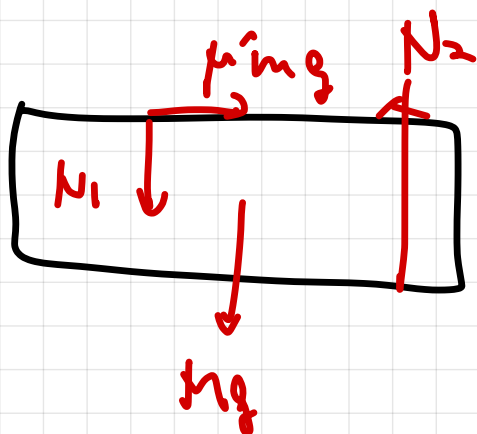
M 止まるまで

静止



$$m a = -\mu' m g$$

$$a = -\mu' g$$



$$M A = \mu' m g$$

$$A = \frac{\mu' m g}{M}$$

相対加速度,  $\mu m$  質量

$$a - A = -\mu' g - \frac{\mu' m g}{M}$$

$$= -\mu' g \frac{M+m}{M}$$

相対速度

$$v_0 - \mu' g \frac{M+m}{M} \cdot t$$

止まるまで

$$t = \frac{M v_0}{\mu' g (M+m)}$$

止まるまで

$$v_0 - \mu' g \frac{M v_0}{\mu' g (M+m)}$$

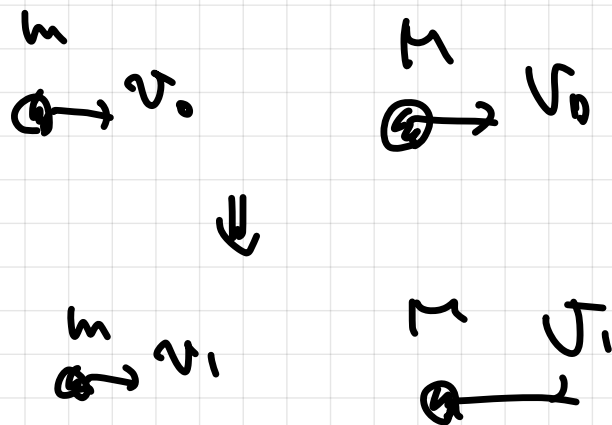
$$= \frac{m v_0}{M+m}$$

速度が一変した瞬間は.  
「合体」している.

$$M \cdot 0 + m N_0 = (M+m) V$$

$$V = \frac{m N_0}{M+m}$$

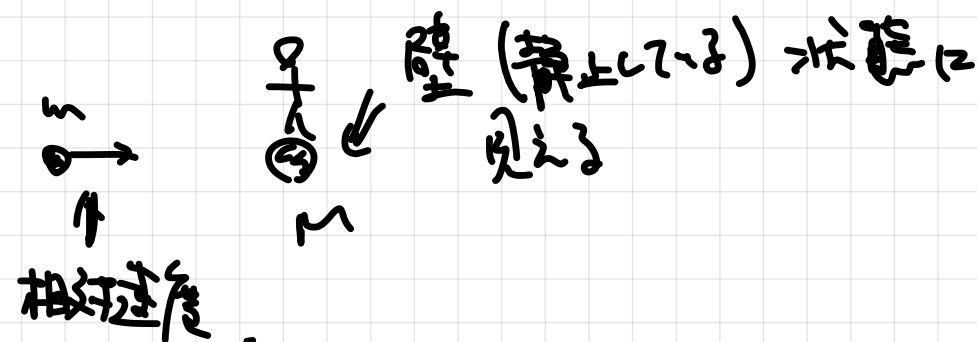
(4)



はね返り係数は?

質量 M と m の 相対速度は.

$$N_0 - V_0 \rightarrow N_1 - V_1$$



$$v_1 - V_1 = -e (v_0 - V_0)$$

↑  
向きが逆変に ±.7 変化する.  
(相対速度)

$$e = - \frac{v_1 - V_1}{v_0 - V_0}$$

# < 目標 5 >

## 力学的エネルギー - 保存則

- \* 位置エネルギー、運動エネルギー - 何?
- \* ちゃんと細かく微積分、計算
- \* かなり色々な問題が解けるようになった。

# 関数とは？

input      function      output  
 入力 → 関数 → 出力

$x \rightarrow f \rightarrow 3x$

$f(x) = 3x$   
 $\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$   
 関数 入力 出力

$x^2 \rightarrow f \rightarrow 3x^2$

$f(x^2) = 3x^2$

|        |   |          |   |          |
|--------|---|----------|---|----------|
| i      | → | f        | → | o        |
| 時刻     |   | 昨日の      |   | 温度       |
| 12元    |   | 朝の気温     |   | 12元      |
| "      |   | "        |   | 風向       |
| 12元    |   | "        |   | 5元       |
|        |   |          |   | 27元 (バグ) |
| 緯度、経度  |   | 今の風      |   | "        |
| 27元    |   |          |   |          |
| 空間のある点 |   | 4-777777 |   | 温度       |
| 3D     |   |          |   | 1D       |

# 逆関数

$$\begin{array}{ccc} i & f & o \\ x & \rightarrow f & \rightarrow 3x+1 \end{array}$$

$$3 \rightarrow f \rightarrow 10$$

$$\begin{array}{ccc} & f^{-1} & \\ \nearrow & & \nwarrow \end{array}$$

逆関数

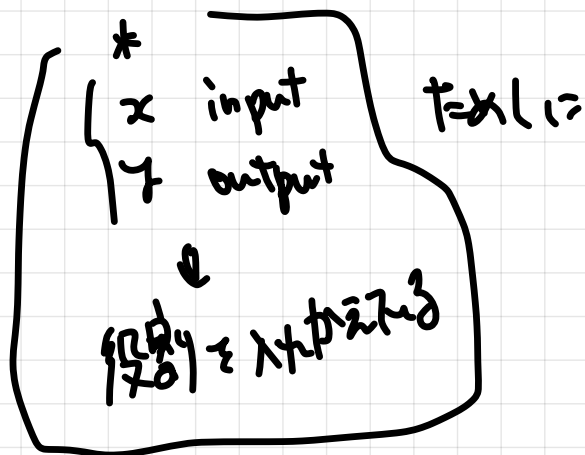
逆関数の定義は...  
 1. 1対1対応  
 2. 定義域と値域が一致する  
 3. 逆関数も関数である

(例)

$$f(x) = 3x+1$$

$$\textcircled{1} f(x) = y \quad x \in \mathbb{R}$$

$$y = 3x+1$$



$$\textcircled{2} x = \frac{y-1}{3} \text{ 解く}$$

$$y = 3x+1$$

$$y-1 = 3x$$

$$x = \frac{y-1}{3}$$

$$\textcircled{3} x = \frac{y-1}{3} \text{ 代入}$$

$$y = \frac{x-1}{3}$$

$$\textcircled{4} \therefore y \text{ の } f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$$

$$f^{-1}(10) = \frac{10-1}{3} = 3$$

$$f(3) = 10$$

検算

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\quad} & f \xrightarrow{\quad} 3x+1 \\ & \nwarrow & \nearrow \\ & f^{-1} & \end{array}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= \frac{f(x) - 1}{3} \\ &= \frac{3x+1 - 1}{3} \\ &= x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f^{-1}(f(x)) = x}}$$

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(x)) &= 3f^{-1}(x) + 1 \\ &= 3x \frac{x-1}{3} + 1 \\ &= x-1 + 1 = x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(f^{-1}(x)) = x.$$

$$f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$$

逆関数の定義

$f$  の逆関数  $f^{-1}$  は、定義上、

よく知られているように、

## <演習>

逆関数 = 求め方.

$$(1) f(x) = 2x+1$$

$$(2) f(x) = x^2 + 3 \quad (x \leq 0) \text{ の部分}$$

$$(3) f(x) = \sqrt{2x+1}$$

$$(1) y = 2x+1$$

$$y-1 = 2x$$

$$x = \frac{y-1}{2}$$

$$y = \frac{x-1}{2} = f^{-1}(x)$$

$$(2) y = x^2 + 3$$

$$y \geq 3$$

$$y-3 = x^2$$

$$x = \pm \sqrt{y-3}$$

$$\underline{x \leq 0}$$

$$x = -\sqrt{y-3}$$

$$y = -\sqrt{x-3} = f^{-1}(x)$$

$$x \geq 3$$

(3)

$$y = \sqrt{2x+1}$$

$$y \geq 0$$

$$x \geq -\frac{1}{2}$$

$$y^2 = 2x+1$$

$$y^2 - 1 = 2x$$

$$x = \frac{y^2 - 1}{2}$$

$$y = \frac{x^2 - 1}{2} = f^{-1}(x)$$

$$x \geq 0$$

# 合成関数

input      function      output

$x \rightarrow f \rightarrow f(x) \rightarrow g \rightarrow g(f(x))$

input

function

output



$\ni \ni \ni$  (1) a function = 関数

合成関数

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

合成関数, 書き方

input

$x$

function

$\rightarrow$

$g \circ f$

$\rightarrow$

output

$g \circ f(x)$

例.

$$\begin{aligned} 1. \quad f(x) &= x^2 & f \circ g(x) &= f(g(x)) = (g(x))^2 = (\sin x)^2 = \sin^2 x \\ g(x) &= \sin x & g \circ f(x) &= g(f(x)) = \sin(f(x)) = \sin x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad f(x) &= 3x+1 & f \circ g(x) &= f(g(x)) = 3g(x)+1 = 3\cos x+1 \\ g(x) &= \cos x & g \circ f(x) &= g(f(x)) = \cos(f(x)) = \cos(3x+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \quad (\sin x)^n &= \sin^n x \\ (\cos x)^n &= \cos^n x \\ (\tan x)^n &= \tan^n x \end{aligned}$$

$$f \circ g \neq g \circ f$$

基本的  $\rightarrow$   $12, 12^2, 12^3, \dots$

\*

$f \circ f \neq g \circ g$  且  $12, 12^2, 12^3, \dots$  使  $12^3$

# 置換積分

高校生に「え 九九、並みは難しいわね?」

置換積分の便利.

$$\int_0^2 x(3x-1)^2 dx$$

$$= \int_0^2 x(9x^2 - 6x + 1) dx$$

$$= \int_0^2 (9x^3 - 6x^2 + x) dx$$

$$= \left[ \frac{9}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^2$$

$$= \frac{9}{4} \cdot 16 - 2 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 4 - 0$$

$$= 36 - 16 + 2 = 22$$

①  $3x-1=t$  とおく.

②  $\begin{cases} x: 0 \rightarrow 2 \\ t: -1 \rightarrow 5 \end{cases}$

③  $\frac{d}{dx}(3x-1) = \frac{d}{dx}t$

$$3 = \frac{dt}{dx} \Rightarrow dx = \frac{dt}{3}$$

(O.K.なように  
記号が一致する) 積分記号は「 $\int$ 」で  
「 $\int$ 」のように変換して O.K.

詳しいことは下頁へ

④  $x = \frac{t+1}{3}$

$$\int_0^2 x (3x-1)^2 dx$$

$\downarrow$   $\downarrow$   $\downarrow$   $\downarrow$   
 $-1 \rightarrow 5$   $\frac{t+1}{3}$   $t^2$   $\frac{dt}{3}$

$$= \frac{1}{9} \int_{-1}^5 (t^3 + t^2) dt$$

$$= \frac{1}{9} \left[ \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} \right]_{-1}^5$$

$$= 22$$

∴ 正答は 22

$$\int_0^2 x (3x-1)^{10} dx$$

$$= \int_{-1}^5 \frac{t+1}{3} \cdot t^{10} \frac{dt}{3}$$

$$= \frac{1}{9} \int_{-1}^5 (t^{11} + t^{10}) dt$$

$$= \frac{1}{9} \left[ \frac{t^{12}}{12} + \frac{t^{11}}{11} \right]_{-1}^5$$

∴ 正答は  
同様に  
計算

42項の和  
を計算

$$(3x-1)^{10} = \text{展開する}$$

$$(3x)^{10} \dots \dots$$

$$(-1)^{10}$$

11項の和  
を計算

ε34,2 - 一般に

$$\int_a^b f(x) dx$$

①

$$t = g(x)$$

②

$$x : \alpha \rightarrow \beta$$

$$t : g(\alpha) \rightarrow g(\beta)$$

③

$$\frac{dt}{dx} = g'(x)$$

$$dx = \frac{dt}{g'}$$

④

$$g^{-1}(t) = g^{-1} \circ g(x) = x$$

$$\int_a^b f(x) dx \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{g(x) \rightarrow g(\beta)} \\ \xrightarrow{g^{-1}(t)} \\ \xrightarrow{\frac{dt}{g'}} \end{array}$$

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f \circ g^{-1}(t) \frac{dt}{g \circ g^{-1}(t)}$$

→ 変数変換

→ 操作を施す

## < 演習 >

1.  $\int_0^2 (2x+5)^4 dx$

2.  $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$

$t = t+1$   $\frac{d}{dx} \sqrt{x+1} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$   
12/12, 2 O.K. (12/12/12).

1.  $t = 2x+5$

$$\begin{cases} x: & 0 \rightarrow 2 \\ t: & 5 \rightarrow 9 \end{cases}$$

$$\frac{dt}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$$

$$\int_0^2 (2x+5)^4 dx$$

$$= \int_5^9 t^4 \cdot \frac{dt}{2}$$

$$= \left[ \frac{t^5}{5} \right]_5^9 = \frac{27962}{5}$$

2.  $\sqrt{x+1} = t$

$$\begin{cases} x: & 0 \rightarrow 3 \\ t: & 1 \rightarrow 2 \end{cases}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2t}$$

$$dx = 2t \, dt$$

$$x+1 = t^2$$

$$x = t^2 - 1$$

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$= \int_1^2 \frac{t^2 - 1}{t} \cdot 2t \, dt$$

$$= 2 \int_1^2 (t^2 - 1) dt$$

$$= 2 \left[ \frac{t^3}{3} - t \right]_1^2 = \frac{10}{3}$$

# 合成関数の微分

$$\frac{d}{dx} (f \circ g(x))$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f \circ g(x+h) - f \circ g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \times \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$\Downarrow$$

$$g(x+h) - g(x) = h' \triangleq \Delta$$

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h' \rightarrow 0}} \frac{f(y+h') - f(y)}{h'} \times \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \frac{df}{dy} \times \frac{dg}{dx}$$

$$= \frac{df(y)}{dy} \cdot \frac{dg}{dx}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\frac{d}{dx} f \circ g(x) = \frac{df(y)}{dy} \frac{dg}{dx}}$$

$$\frac{d}{dx} (x^2+3)^3$$

$$\downarrow \begin{aligned} g &= x^2+3 \\ f &= x^3 \end{aligned}$$

$$= \frac{d}{dx} f \circ g(x)$$

$$= \frac{df(g)}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

$$= 3g^2 \cdot 2x$$

$$= 6x(x^2+3)^2$$

$$\frac{d}{dx} \underline{\underline{(2x+1)^n}}$$

$g(x)$

$$= \frac{d}{dg} g^n \cdot \frac{dg}{dx}$$

$$= n g^{n-1} \cdot 2$$

$$= 2n(2x+1)^{n-1}$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

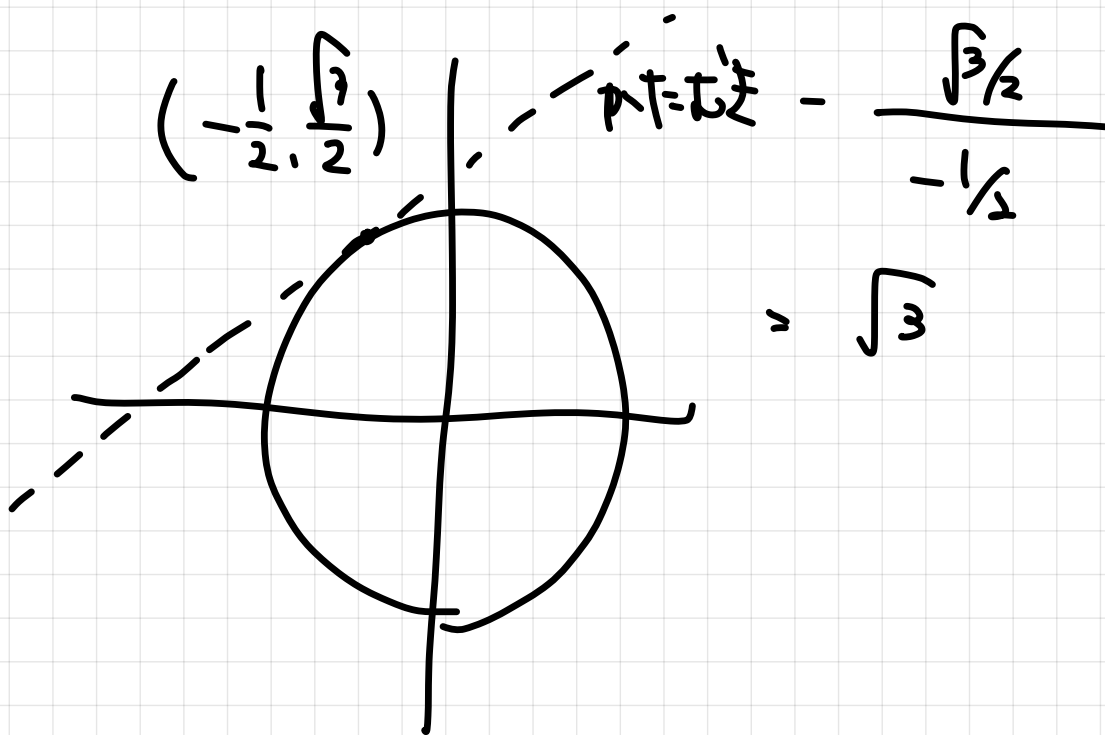
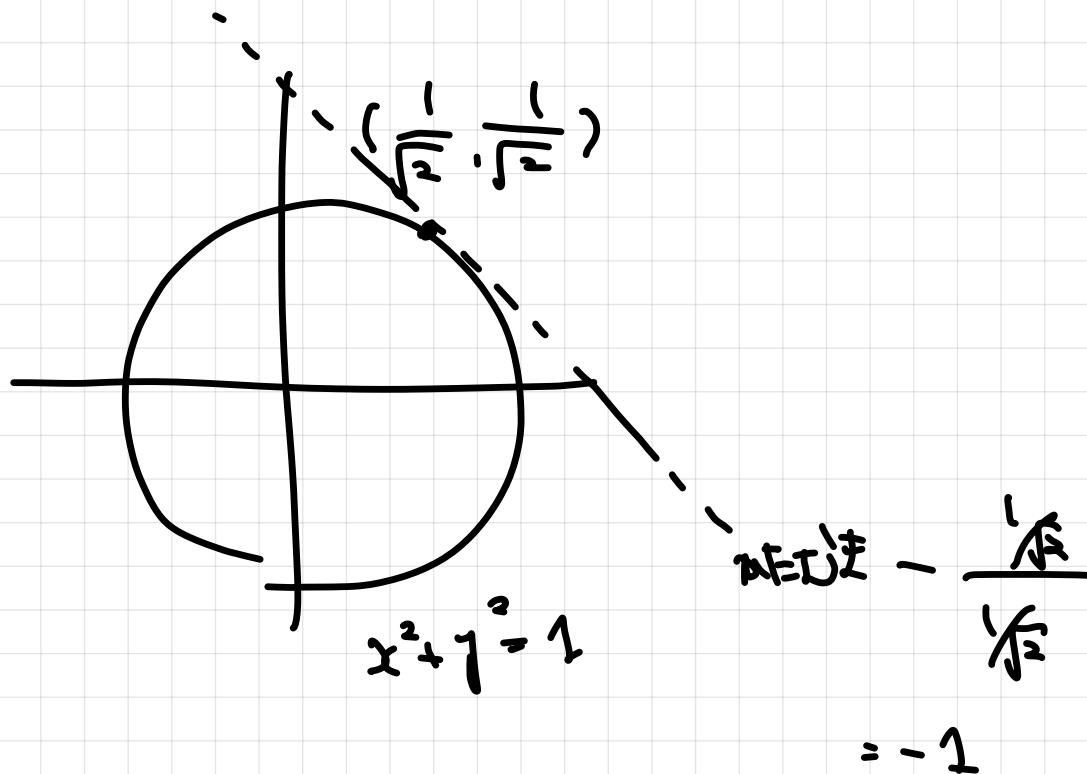
$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = ?$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} (x^2 + y^2) = \frac{d}{dx} \cdot 1$$

$$2x + \frac{dy^2}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\cancel{2}x + \cancel{2}y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$



# 1次元上、質点の運動エネルギー

運動方程式

$$m \xrightarrow{F(t)}$$

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\downarrow$$

$$dx = v dt$$

$$m a(t) = F(t)$$

都合上

$$m \dot{v}(t) = F(t)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} m \dot{v}(t) dx = \int_{x_1}^{x_2} F(t) dx$$

$$\begin{cases} x: x_1 \rightarrow x_2 \\ t: t_1 \rightarrow t_2 \end{cases}$$

$$m \int_{t_1}^{t_2} \dot{v} v dt = \int_{t_1}^{t_2} F(t) v dt$$

↑

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} v^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} = \frac{1}{2} \cdot 2v \dot{v} = v \dot{v}$$

$$\Rightarrow v \dot{v} = \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} F \cdot v \, dt = m \int_{t_1}^{t_2} \dot{v} \cdot v \, dt$$

$$= m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) dt$$

$$= m \left( \frac{v^2(t_2)}{2} - \frac{v^2(t_1)}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{m v^2(t_2)}{2} - \frac{m v^2(t_1)}{2} = \int_{t_1}^{t_2} F \cdot v \, dt$$

$t=t_2$  の運動エネルギー

仕事

「運動エネルギー」の変化

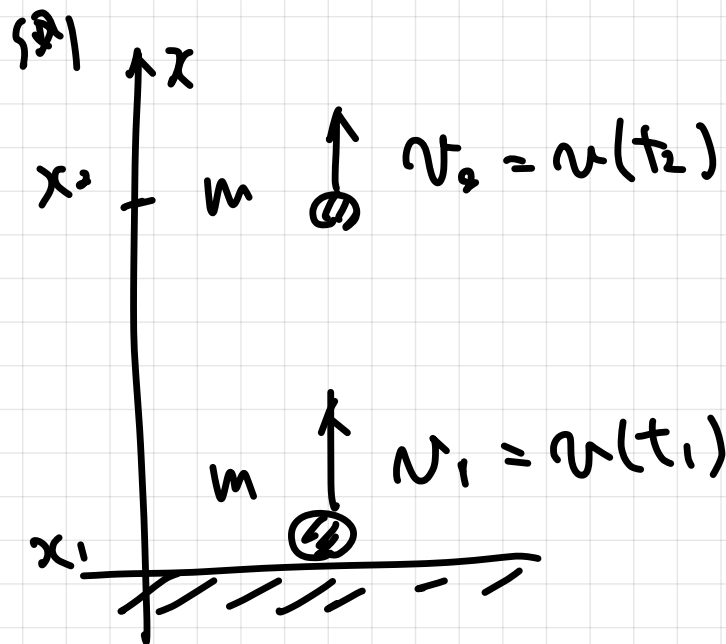
= 「仕事」

\* 「運動量の変化」 = 「力積」  
ベクトルの式 成分数式  
等式 2.4.2  
等式 17.12

$$\int_{t_1}^{t_2} F(t) \cdot v(t) \, dt$$

仕事率

微小変化



$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \int_{x_1}^{x_2} (-mg) \cdot dx$$

$$= -mg(x_2 - x_1) \Rightarrow$$

$x_1 = 0$  として.

取 10 として  $h$  として.  $v = 0$

$$0 + \frac{mv_1^2}{2} = mgh$$

$$h = \frac{v_1^2}{2g}$$

$$\frac{mv_2^2}{2} + mgx_2 = \frac{mv_1^2}{2} + mgx_1$$

↑  
エネルギー保存則

# 位置エネルギー

$$\Rightarrow \frac{mv_2^2}{2} + mgx_2 = \frac{mv_1^2}{2} + mgx_1$$

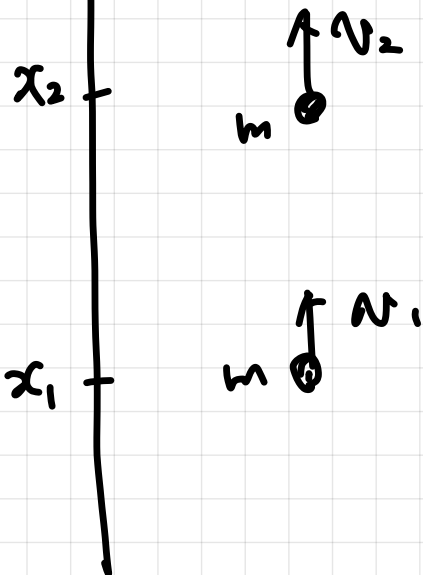
「運動エネルギー」の変化 = 「重力の仕事」

「力学のエネルギー」の保存

「運動エネルギー」 + 「重力位置エネルギー」

外力は「重力」= 保守力

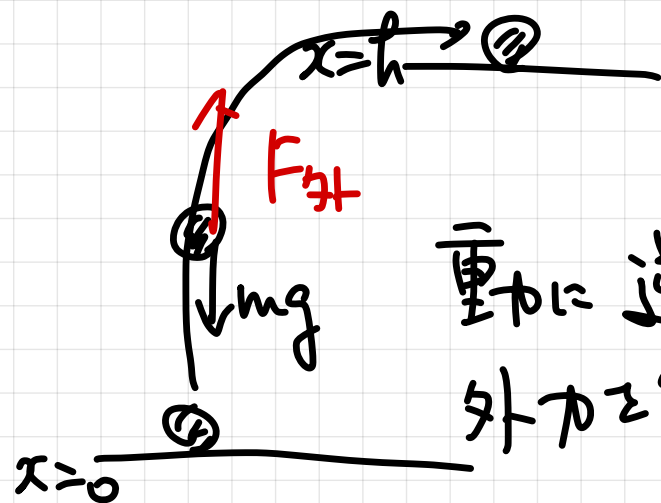
(311) x



$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} (-mg) dx$$

$$= -mgx_2 + mgx_1$$



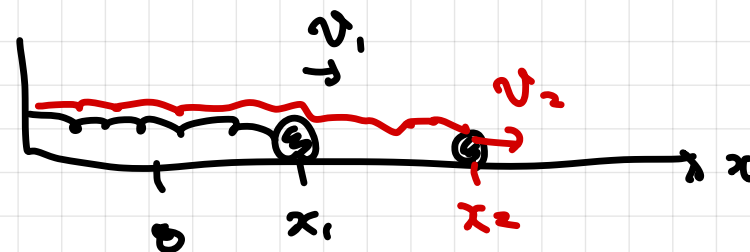
重力に逆, 2倍の  
外力を加えて静止した状態。

$$F_{\text{ext}} = mg \quad (v_0 < 1)$$

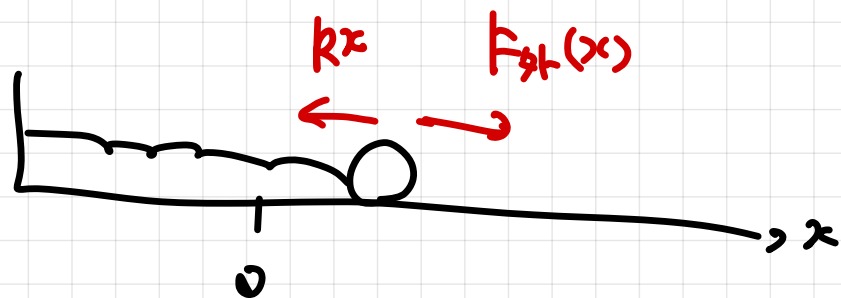
$$\int_0^h F_{\text{ext}} dx = mgh$$

これを  $\Delta U$  として定義する。  
位置エネルギー  $U$  は定義される。

(5112)



$$\begin{aligned} \text{運動エネルギー} - \frac{1}{2}mv_1^2 &= \text{仕事} \\ \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 &= \int_{x_1}^{x_2} (-kx) dx \\ &= -\frac{kx_2^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2} \\ \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{kx_2^2}{2} &= \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{kx_1^2}{2} \\ \text{力学エネルギー保存則} \end{aligned}$$



$$\int_0^x F_{\text{ext}}(x') dx' = \int_0^x kx' dx'$$

$$= \frac{kx^2}{2}$$

==

位置の弾性エネルギー

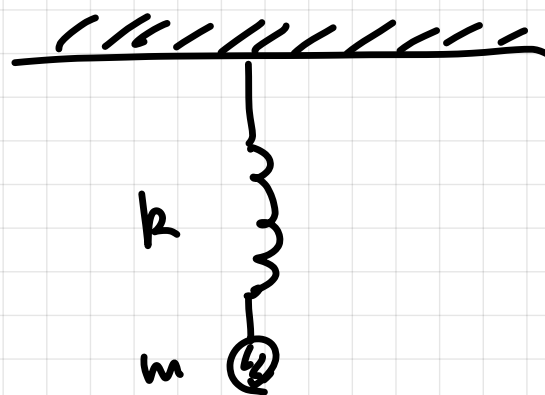
重力の位置エネルギー -  $mgh$

位置の弾性エネルギー  $\frac{1}{2} kx^2$  (xは伸び)

運動エネルギー -  $\frac{1}{2} mv^2$

<演習>

①

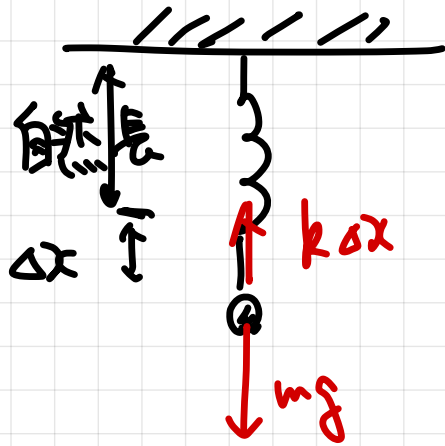


(1) 静止状態、位置、伸びは?

(2) 自然長まで手を上げてはなす → 最大、伸びは?

(3) ↓ 最大、速度は?

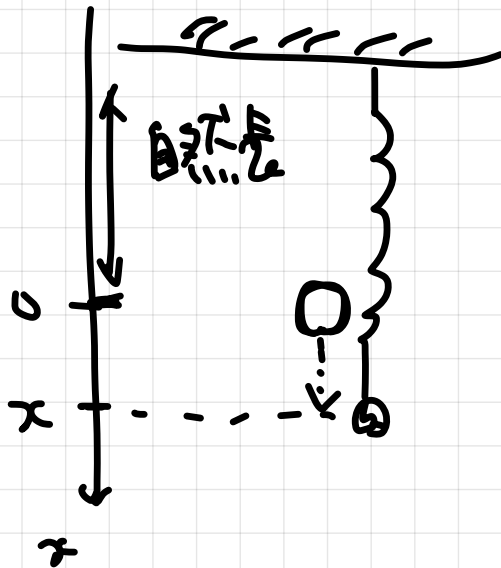
(1)



$$k\Delta x = mg$$

$$\Delta x = \frac{mg}{k}$$

(2)



$$\frac{1}{2} m \cdot 0^2 + mg \cdot 0 + \frac{1}{2} k \cdot 0^2$$

$$= \frac{1}{2} m v^2 + mg(-x) + \frac{1}{2} k x^2$$

$$= \frac{1}{2} m \cdot 0^2 + mg(-x_{\max}) + \frac{1}{2} k x_{\max}^2$$

$$\frac{1}{2} k x_{\max}^2 - mg x_{\max} = 0$$

$$x_{\max} = \frac{2mg}{k}$$

(3)

$$\frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \left( -\frac{1}{2} k x^2 + mg x \right)_{\max}$$

$$-\frac{1}{2}kx^2 + mgx$$

$$= -\frac{1}{2}k \left( x^2 - \frac{2mg}{k}x \right)$$

$$= -\frac{1}{2}k \left\{ \left( x - \frac{mg}{k} \right)^2 - \frac{m^2g^2}{k^2} \right\}$$

$$= -\frac{1}{2}k \left( x - \frac{mg}{k} \right)^2 + \frac{m^2g^2}{2k}$$

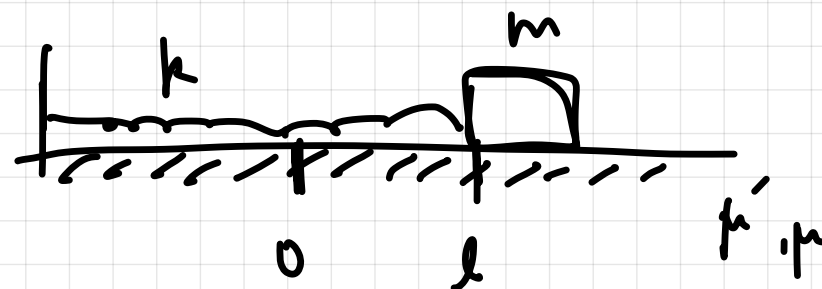
$$\leq 0$$

$$\leq \frac{m^2g^2}{2k}$$

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{m^2g^2}{2k}$$

$$v_{\max} = g \sqrt{\frac{m}{k}}$$

(2)

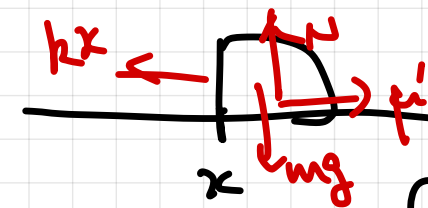


l だけずれた位置に静止したとき重力と弾力との合力がゼロになる。

(1)  $x = x_0$  とき、 $\frac{1}{2}mv^2 = 0$  静止している。

(2)  $l$  だけずれたとき?

(1)  $x=l$  且  $x=x_1$  时情况。



运动方程为

$$0 - 0 = \int_l^{x_1} (-kx + \mu mg) dx$$

$$= -\left(\frac{k}{2}x_1^2 - \mu mg x_1\right) + \frac{k}{2}l^2 - \mu mg l$$

$$\frac{k}{2}(x_1^2 - l^2) - \mu mg(x_1 - l) = 0$$

$$\frac{k}{2}(x_1 + l) - \mu mg = 0$$

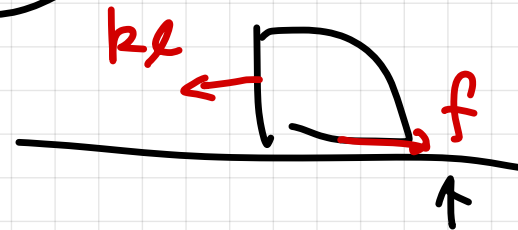
$$\frac{k}{2}(x_1 + l) = \mu mg$$

$$x_1 + l = \frac{2\mu mg}{k}$$

$$x_1 = -l + \frac{2\mu mg}{k}$$

(2)

$x=l$

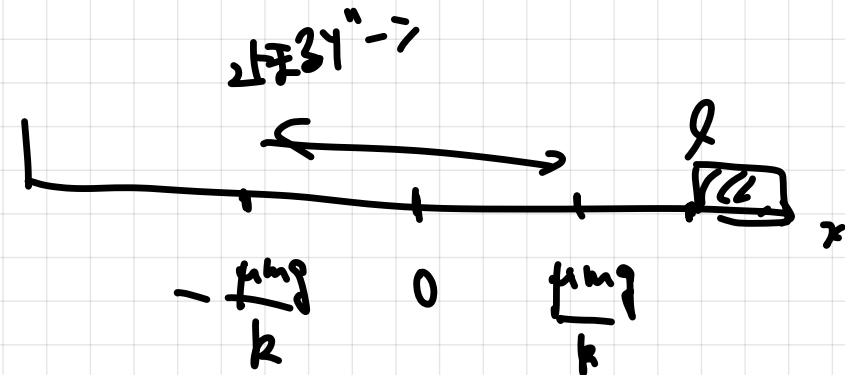


静止且  $kl > f_{max} = \mu mg$

$$kl > f_{max} = \mu mg$$

$$l > \frac{\mu mg}{k}$$

$x=x_1$

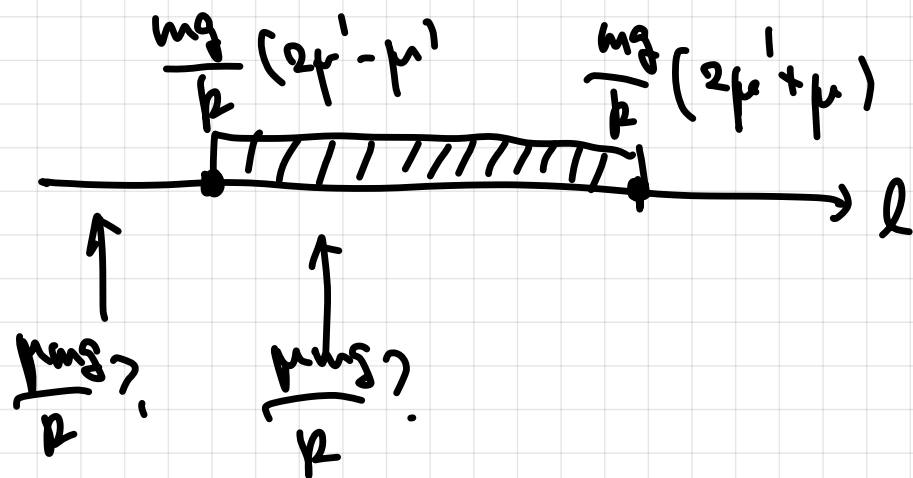


$$-\frac{\mu mg}{k} \leq x_1 \leq \frac{\mu mg}{k}$$

$$-\frac{\mu mg}{k} \leq -l + \frac{2\mu' mg}{k} \leq \frac{\mu mg}{k}$$

$$-\frac{mg}{k}(\mu + 2\mu') \leq -l \leq \frac{mg}{k}(\mu - 2\mu')$$

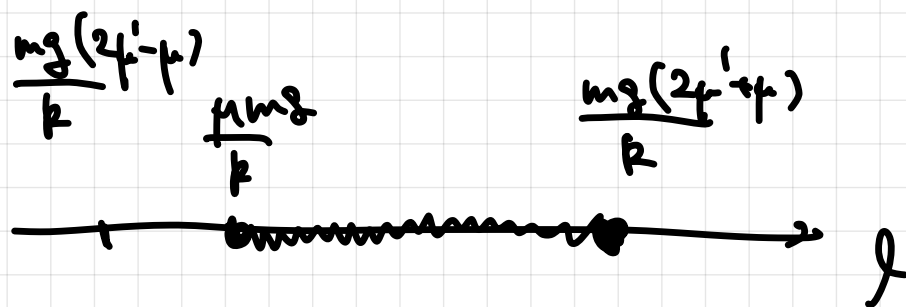
$$\frac{mg}{k}(2\mu' - \mu) \leq l \leq \frac{mg}{k}(\mu + 2\mu')$$

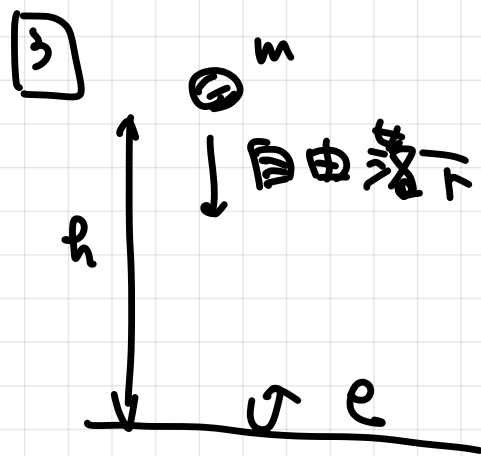


$$\frac{mg}{k}(2\mu' - \mu) \geq \frac{mg}{k} \cdot \mu \quad \tau$$

$$2\mu' - \mu \geq \mu \quad \tau$$

$$2\mu' \geq 2\mu \quad \tau$$





衝突で失うエネルギーは?

$$mgh - \Delta E = e^2 mgh$$

$$\Delta E = (1 - e^2) mgh$$

$$0 \leq e \leq 1$$

弾性衝突

$$e = 1 \text{ のとき } \Delta E = 0$$

⇒ 弾性衝突 のとき

衝突直前の速度は?

$$\frac{m}{2} \cdot 0^2 + mgh = \frac{m}{2} v^2 + mg \cdot 0$$

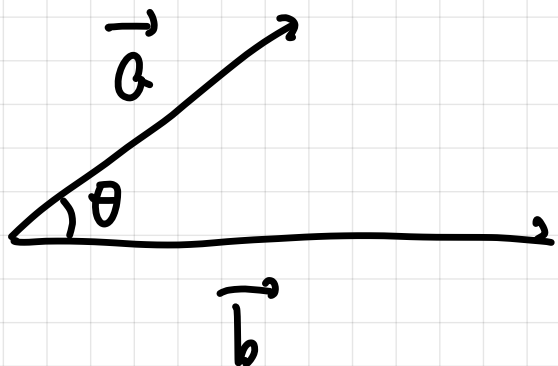
$$v = \sqrt{2gh}$$

直後は?  $ev = e\sqrt{2gh}$

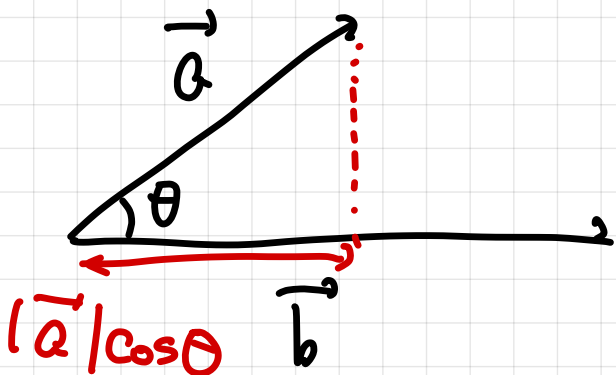
運動エネルギーは?  $\frac{1}{2} m \cdot (ev)^2 = e^2 mgh$

# ベクトルの内積

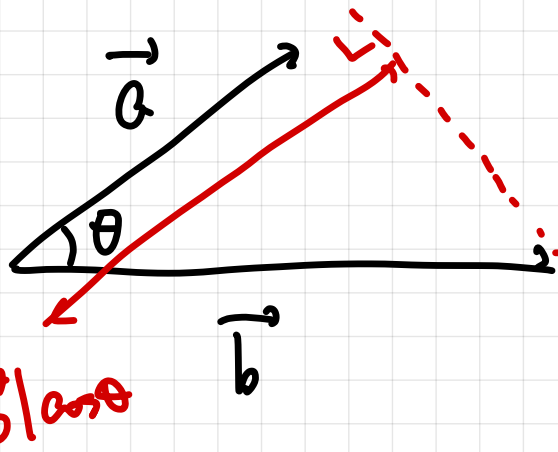
ベクトルの計算、一種



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$



$\vec{b}$  方向に  $\vec{a}$  の成分



$\vec{a}$  方向に  $\vec{b}$  の成分

$$\theta = 90^\circ \Rightarrow \cos \theta = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

ベクトル直交  
→ 内積ゼロ

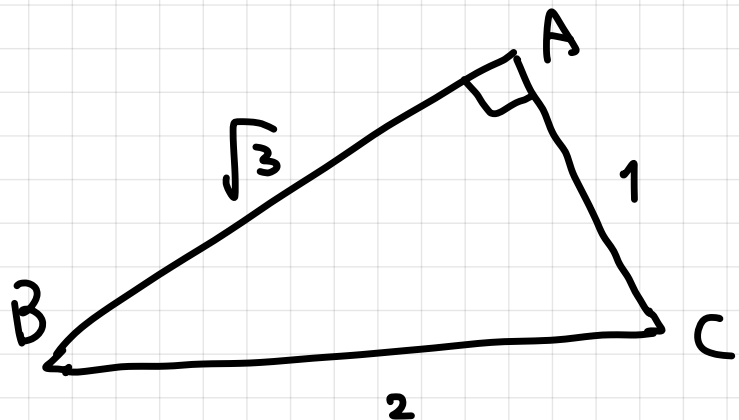
$$\theta = 0^\circ \Rightarrow \cos \theta = 1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

$$* \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

2ベクトル a, b  
スカラー積



$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \sqrt{3} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$(A\vec{a} + B\vec{b}) \cdot (C\vec{c} + D\vec{d})$$

$$= AC\vec{a} \cdot \vec{c} + BC\vec{b} \cdot \vec{c} + AD\vec{a} \cdot \vec{d} + BD\vec{b} \cdot \vec{d}$$

3.) 1.  $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$

2.  $|2\vec{a} + \vec{b}|^2$

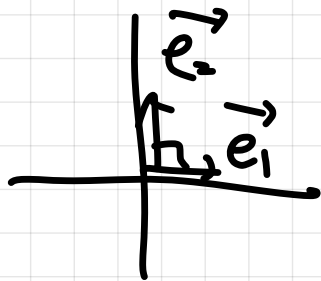
1.  $\Rightarrow |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$

2.  $| \quad |^2 = ( \quad ) \cdot ( \quad )$

$$= 4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \text{ 求 } \vec{a} \cdot \vec{b} = ?$$

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$|\vec{e}_1|^2 = 1, |\vec{e}_2|^2 = 1, \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$$

$$\begin{cases} \vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 \\ \vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2) \cdot (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2) \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  成分同士の積  
と和。

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

$$(19) \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ अतः}$$

$$|2\vec{a} - \vec{b}|^2 = ?$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \\ &= -1 + 0 + 6 \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 \\ &= 1 + 4 + 9 = 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{b}|^2 &= (-1)^2 + 0^2 + 2^2 \\ &= 1 + 4 = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |2\vec{a} - \vec{b}|^2 &= 4|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 4 \cdot 14 - 4 \cdot 5 + 5 = 41 \end{aligned}$$

$$2\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$|2\vec{a} - \vec{b}|^2 = 9 + 16 + 16 = 41$$

$$\frac{d}{dt} |\vec{v}(t)|^2$$

$$= \frac{d}{dt} (v_1^2(t) + v_2^2(t) + v_3^2(t))$$

$$\frac{d}{dt} v_1^2(t) = \frac{dv_1^2}{dv_1} \frac{dv_1}{dt}$$

$$= 2v_1 \cdot \dot{v}_1$$

$$\frac{d}{dt} |\vec{v}(t)|^2 = 2 (v_1 \cdot \dot{v}_1 + v_2 \cdot \dot{v}_2 + v_3 \cdot \dot{v}_3)$$

$$= 2 \overline{v(t)} \cdot \dot{\overline{v(t)}}$$

3次元の力の仕事 -

仕事 - は 2次元 -

(1次元)

$$\frac{mv^2}{2}$$



(3次元)

$$\frac{m}{2} |\vec{v}|^2$$

運動エネルギー - 変化

運動方程式

$$\vec{F}(t) = m \frac{d}{dt} \vec{v}(t)$$

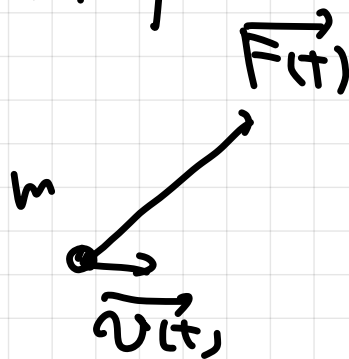
$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} m \vec{v} \cdot \vec{v} dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d}{dt} \left( \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) dt$$

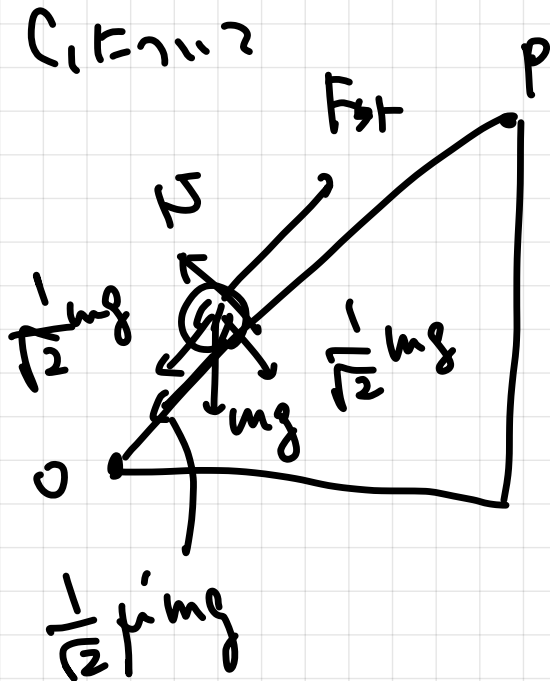
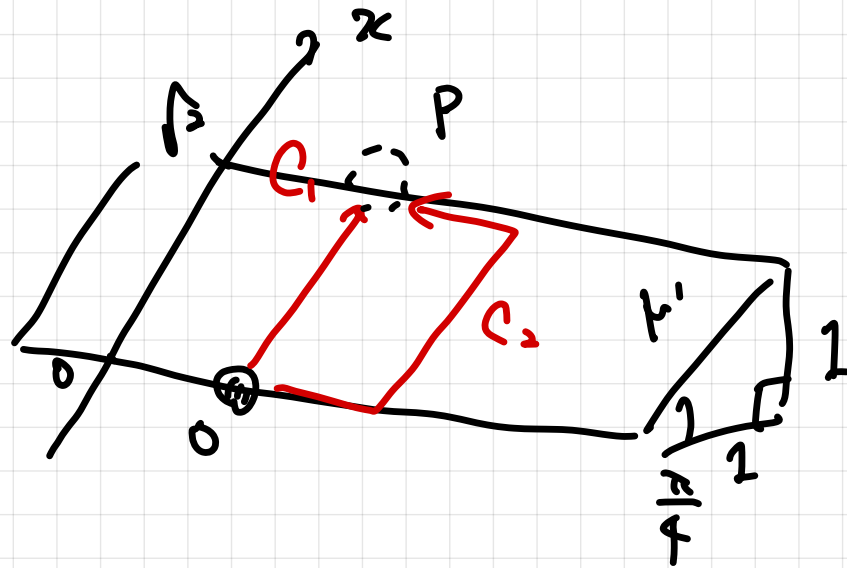
$$= \frac{m}{2} |\vec{v}(t_2)|^2 - \frac{m}{2} |\vec{v}(t_1)|^2$$

微小仕事



$\vec{F} \cdot d\vec{r}$   
微小仕事

# 保存力 & 非保存力



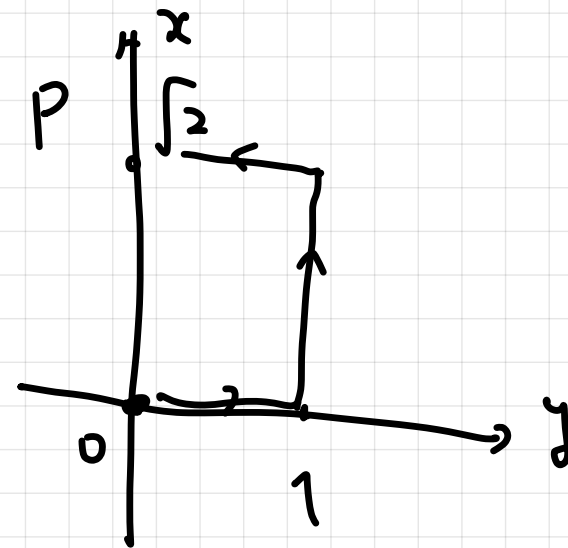
重力:  
 運動方向に  
 差は  
 外に作用  
 $F_{fr} < \dots$  する。

$$F_{fr} = \frac{1}{\sqrt{2}} mg + \frac{1}{\sqrt{2}} \mu mg$$

$$\int_0^{\sqrt{2}} F_{fr} dx$$

$$= \underline{mg} + \underline{\mu mg}$$

C2 12



$$\int_0^1 \underbrace{F_{\text{st}}^2}_{=\frac{1}{2}\mu mg} dy + \int_0^{\sqrt{2}} \underbrace{F_{\text{st}}^2}_{=\frac{1}{2}mg + \frac{1}{2}\mu mg} dx + \int_1^0 \underbrace{F_{\text{st}}}_{=\frac{1}{2}\mu mg} dy$$

$$= \underline{mg} + \underline{\mu mg(1+\sqrt{2})}$$

重力 = 逆(上) = 外力 (仕事) = <sup>重力,</sup> 位置エネルギー -

---

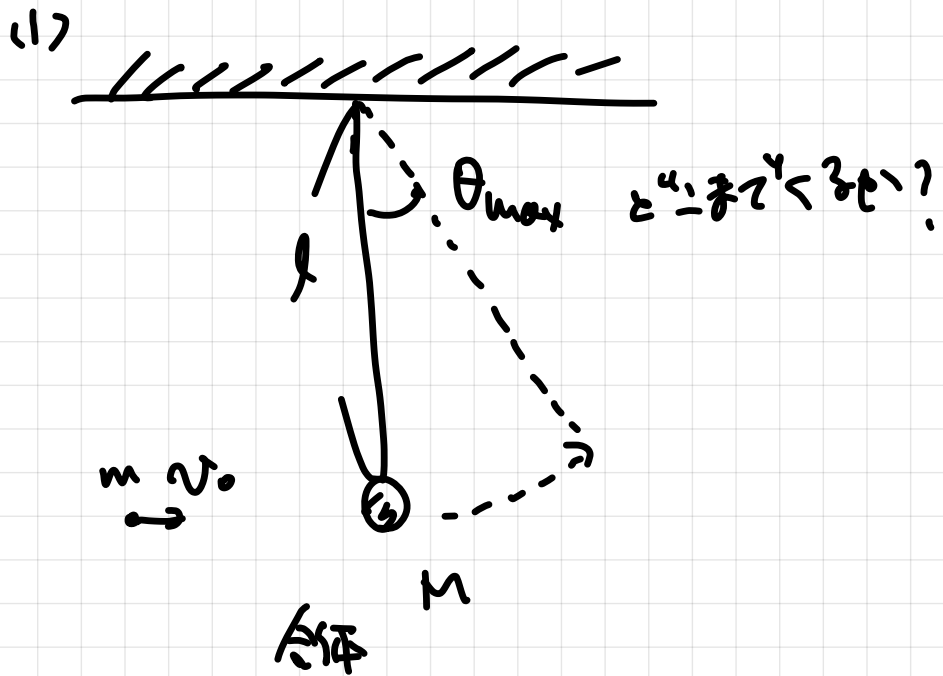
保存力      ← 経路に依らず

動摩擦 は 経路に依存了 ⇒ 位置エネルギー - は 定か? ではない.

非保存力

「重力」  
「動摩擦」  
位置エネルギー - は  
定か? ではない、  
が十分

# < 演習 >



$$\text{衝突} \Rightarrow m v_0 + M \cdot 0 = (m+M) V_0$$

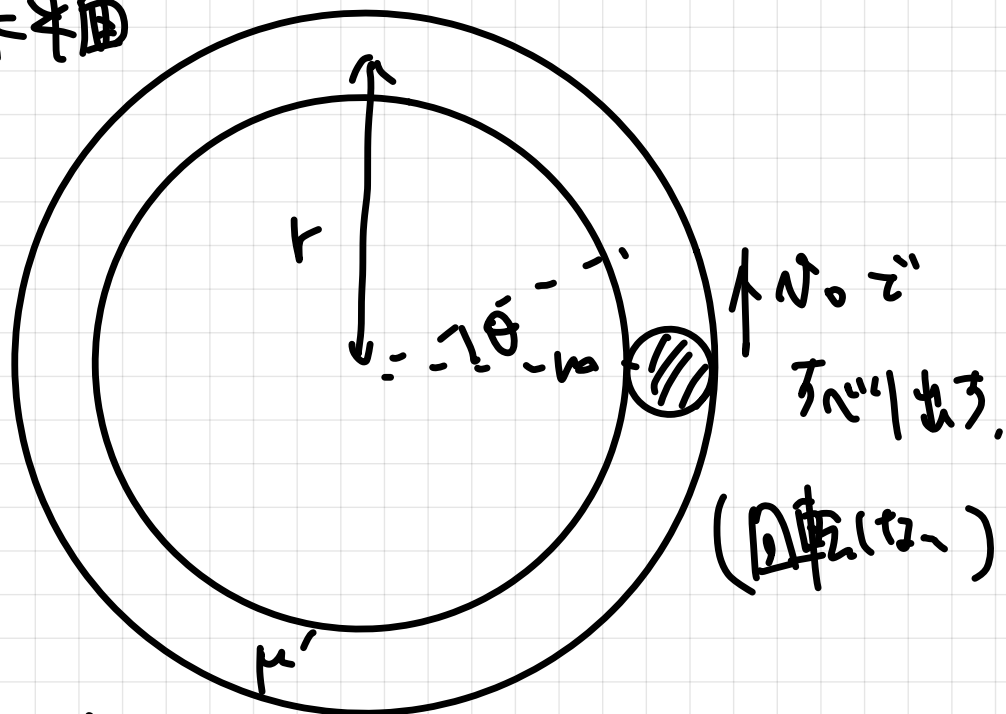
$$V_0 = \frac{m}{m+M} v_0$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (m+M) V_0^2 + (m+M) g \cdot 0 \\ = & \frac{1}{2} (m+M) \cdot 0^2 + (m+M) g \cdot l (1 - \cos \theta_{\max}) \end{aligned}$$

$$\frac{V_0^2}{2gl} = 1 - \cos \theta_{\max}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta_{\max} &= 1 - \frac{V_0^2}{2gl} \\ &= 1 - \frac{m^2 v_0^2}{2gl (m+M)^2} \end{aligned}$$

(2) 木平面



$$v_1^2 = v_0^2 - \frac{g^2}{4\pi} \cdot 2\pi r \mu' \sigma g$$

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 4\pi r \mu' g}$$

(右の方、壁に当たらない、)

1 周に  $\vec{R}_1, \vec{R}_2$  まで  $\vec{R}_1$  と  $\vec{R}_2$  は?

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \int_0^{2\pi} \underbrace{(-\mu' \sigma g)}_{r d\theta} dx = -2\pi r \mu' \sigma g$$

## < 目標 6 >

$$m a = -kx$$

$$\Rightarrow x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

\* 三角関数の微積分  $\rightarrow$  微分方程式

\* 1/2 の  $\sin$ 、3/2 の  $\cos$  の同期の力運動

2の正整数乗 = 分数乗の指数

正の整数乗のルール

$$\left\{ \begin{array}{l} A^x \times A^y = A^{x+y} \\ A^x \div A^y = A^{x-y} \\ (A^x)^y = A^{xy} \end{array} \right.$$

乗数に、この全部が適用される。

⇒ 7 = 2<sup>2.8</sup>

$$2^{-1} = 2^{1-2} = 2^1 \div 2^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2^{-x} = \frac{1}{2^x}$$

$$2^0 = 2^1 \div 2^1 = 1$$

$$A^{-x} = \frac{1}{A^x}, \quad A^0 = 1$$

$$2^1 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

2重根 = 平方根

$$2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2$$

3重根 = 立方根

$$\left(3^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{15}{4}} = 3^{\frac{2}{3} \times \frac{15}{4}} = 3^{\frac{5}{2}}$$

$$5^{\frac{1}{2}} \div 5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}} = 5^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{5^{\frac{1}{6}}}$$

< 演習 >

1.  $-2^0$

2.  $3^{-3}$

3.  $x^{-1} x^3$

4.  $2^{\frac{1}{3}} \times 32^{\frac{1}{3}}$

5.  $\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{6}}$

6.  $3^x + 3^{-x} = 2 \Rightarrow a \text{ 何?}$   $9^x + 9^{-x} = 2$

$$1. \quad -2^0 = -1 \times 2^0 \\ = -1 \times 1 = -1$$

$$2. \quad 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

$$3. \quad x^{-1} x^3 = x^{-1+3} = x^2$$

$$4. \quad 2^{\frac{1}{3}} \times 32^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \times (2^5)^{\frac{1}{3}} \\ = 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{5}{3}} \\ = 2^{\frac{1}{3} + \frac{5}{3}} = 2^2 \\ = 4$$

$$5. \quad \left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)^{\frac{1}{6}} \\ = \left(\frac{3}{4}\right)^{2 \times \frac{1}{6}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$6. \quad 3^x + 3^{-x} = 3 \quad \Rightarrow \quad \uparrow^x + \uparrow^{-x} = 7$$

$$(3^x + 3^{-x})^2 = 9$$

$$(3^x)^2 + 2 \cdot 3^x \cdot 3^{-x} + (3^{-x})^2$$

$$(3^2)^x + 2 \cdot 3^{x-x} + (3^2)^{-x}$$

$$9^x + 2 + 9^{-x}$$

# 指数、微分、積分

$$\frac{d}{dx} x^a = a x^{a-1} \quad (a \neq -1 \text{ のとき})$$

(証明略)

たとえば

$$\frac{d}{dx} x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$$

例.

1.  $x^{\frac{1}{2}}$

2.  $\frac{1}{(2x+3)^3}$

3.  $(x^2+x)^{-\frac{1}{2}}$

微分

1.  $\frac{d}{dx} x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

2.  $\frac{d}{dx} (2x+3)^{-3}$   $z=2x+3$

$$= \frac{d}{dz} z^{-3} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$= -3 z^{-4} \cdot 2 = \frac{-6}{(2x+3)^4}$$

3.  $\frac{d}{dx} (x^2+x)^{-\frac{1}{2}}$   $x^2+x=z$

$$= \frac{d}{dz} z^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$= -\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} \cdot (2x+1) = -\frac{2x+1}{2(x^2+x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{x+1} \, dx$$

$$\begin{aligned} x+1 &= t \\ \begin{cases} x: -1 \rightarrow 1 \\ t: 0 \rightarrow 2 \end{cases} & \quad \frac{dt}{dx} = 1 \\ & \quad \downarrow \\ & \quad dx = dt \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{x+1} \, dx$$

$$= \int_0^2 t^{\frac{1}{2}} \, dt$$

$$= \left[ \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_0^2$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$1. \int_3^5 (x-2)^{-\frac{3}{2}} \, dx$$

$$2. \int_0^2 x \sqrt{x^2+4} \, dx$$

$$1. \quad x-2 = t \quad dx = dt$$

$$x: 3 \rightarrow 5$$

$$t: 1 \rightarrow 3$$

$$\int_1^3 t^{-\frac{3}{2}} \, dt$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}} + 2$$

$$= \left[ -2t^{-\frac{1}{2}} \right]_1^3$$

$$= -9 \left( 3^{-\frac{1}{2}} - 1 \right)$$

$$9. \quad \sqrt{x^2+4} = t$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2} (x^2+4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{x}{t}$$

$$t dt = x dx$$

$$\begin{cases} x: & 0 \rightarrow 2 \\ t: & 2 \rightarrow 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\int_0^2 x \sqrt{x^2+4} dx$$

$$= \int_2^{2\sqrt{2}} t \cdot t dt$$

$$= \left[ \frac{1}{3} t^3 \right]_2^{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{8}{3} (2\sqrt{2} - 1)$$

積 = 商, 形をL関数, 微分

$$\frac{d}{dx} (f(x)g(x))$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} f(x)$$

$$= f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

$$\frac{d}{dx} (f(x) g(x) h(x)) = ?$$

$$= \frac{d}{dx} \{ (f(x) g(x)) h(x) \}$$

$$= (f(x) g(x))' h(x) + (f(x) g(x)) h'(x)$$

$$= (f'(x) g(x) + f(x) g'(x)) h(x) + f(x) g(x) h'(x)$$

$$= f'(x) g(x) h(x) + f(x) g'(x) h(x) + f(x) g(x) h'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)$$

$$= \frac{d}{dx} \left( f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right)$$

$$= f'(x) \frac{1}{g(x)} + f(x) \left( \frac{1}{g(x)} \right)'$$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x) \left( -\frac{g'(x)}{(g(x))^2} \right)$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (g(x))^{-1} &= - (g(x))^{-2} \cdot g'(x) \\ &= - \frac{g'(x)}{(g(x))^2} \end{aligned}$$

< 演習 >

1.  $x^2(2x+3)$

2.  $x^2(2x+3)^{\frac{3}{2}}$

3.  $\frac{x^2}{2x+3}$

4.  $\frac{x+1}{\sqrt{x}}$

5.  $\frac{g(x)}{(f(x))^2}$

$$1. \frac{d}{dx} \{ x^2(2x+3) \}$$

$$= 2x(2x+3) + x^2 \cdot 2$$

$$= 6x^2 + 6x$$

$$2. \frac{d}{dx} \{ x^2(2x+3)^{\frac{3}{2}} \}$$

$$= 2x(2x+3)^{\frac{3}{2}} + x^2 \cdot \frac{3}{2} (2x+3)^{\frac{1}{2}} \cdot 2$$

$$= x(2x+3)^{\frac{1}{2}} \{ 2(2x+3) + 3x \}$$

$$= x(2x+3)^{\frac{1}{2}} (7x+6)$$

$$3. \frac{d}{dx} \left( \frac{x^2}{2x+3} \right)$$

$$= \frac{2x(2x+3) - x^2 \cdot 2}{(2x+3)^2}$$

$$= \frac{2x(2x+3-x)}{(2x+3)^2}$$

$$= \frac{2x(x+3)}{(2x+3)^2}$$

$$4. \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{x+1}{\sqrt{x}} \right)$$

$$= \frac{1 \cdot \sqrt{x} - (x+1) \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{2x - x - 1}{2x\sqrt{x}}$$

$$= \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$$

$$5. \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{g}{f^2} \right)$$

$$= \frac{g' \cdot f^2 - g \cdot 2f f'}{f^4}$$

$$= \frac{g' f - 2 g f'}{f^3}$$

## 三角関数の加法定理・和積の公式

公式 (証明省)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \\ \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \end{array} \right.$$

を1つに合わせればOK

$$\frac{0}{6}\pi, \frac{0}{4}\pi, \frac{0}{3}\pi, \frac{0}{2}\pi$$

また  $\sin, \cos, \tan$  の値は  $\lambda$  だけ。

↓

$$1. \sin \frac{5}{12}\pi$$

$$2. \cos \frac{1}{12}\pi$$

$$3. \tan\left(\frac{1}{12}\pi\right)$$

$$1. \sin \frac{5\pi}{12}$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3} + 1}{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{4\sqrt{2}}$$

$$2. \cos \frac{\pi}{12}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$3. \tan\left(-\frac{\pi}{12}\right)$$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{3}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + 1 \cdot \sqrt{3}}$$

$$= \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{(1-\sqrt{3})^2}{1-3}$$

$$= -\frac{1-2\sqrt{3}+3}{2} = -\frac{4-2\sqrt{3}}{2} = -2+\sqrt{3}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$+ \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

---

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = A \\ \alpha - \beta = B \end{cases} \quad \alpha = \frac{A+B}{2}, \quad \beta = \frac{A-B}{2}$$

$$\begin{cases} \sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\ \sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \\ \cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\ \cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \end{cases}$$

$$1. \quad \sin \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12}$$

$$2. \quad \cos \frac{5\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12}$$

$$3. \quad \sin(x+h) - \sin x$$

$$2. \quad \cos \frac{5\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12}$$

$$= -2 \sin \frac{1}{2} \left( \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12} \right) \sin \frac{1}{2} \left( \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12} \right)$$

$$= -2 \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= -2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$1. \quad \sin \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12}$$

$$= 2 \sin \frac{1}{2} \left( \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12} \right) \cos \frac{1}{2} \left( \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12} \right)$$

$$= 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6}$$

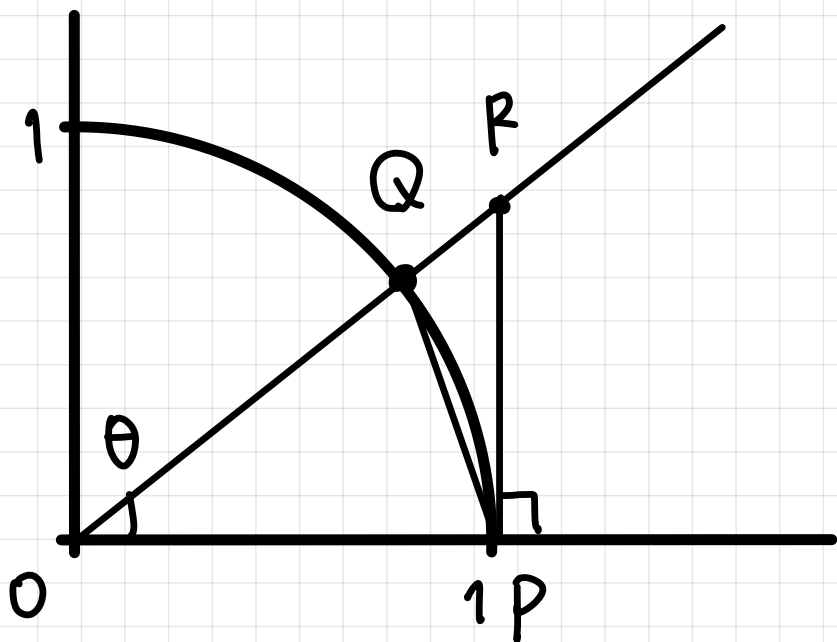
$$= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$3. \quad \sin(x+h) - \sin x$$

$$= 2 \cos \frac{1}{2}(x+h+x) \sin \frac{1}{2}(x+h-x)$$

$$= 2 \cos \left( x + \frac{h}{2} \right) \sin \frac{h}{2}$$

# 三角関数の極限



$$\tan \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

逆数  $\approx 3$

不等号は  
逆転

$$\frac{1}{\sin \theta} > \frac{1}{\theta} > \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

全体  $\times \sin \theta$  倍

$$1 > \frac{\sin \theta}{\theta} > \cos \theta$$

$\theta \rightarrow 0$

$$1 > \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} > 1$$

$= 1$  (1±2455)

$$\triangle OPQ < \text{弧} PQ < \triangle OPR$$

$$\frac{1}{2} \times 1 \times \sin \theta$$

$$\frac{1}{2} \times 1 \times \theta$$

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \tan \theta$$

$$\sin \theta < \theta < \tan \theta$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

< 演習 >

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$$

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{3}{2}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

$$\begin{array}{ccc} -\frac{1}{x} & < \frac{\sin x}{x} < & \frac{1}{x} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

### 三角関数の微分積分

$$\frac{d}{dx} \sin x$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos(x + \frac{h}{2}) \sin \frac{h}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x + \frac{h}{2}) \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= \cos x \cdot 1 = \cos x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

<演習>

1.  $\frac{d}{dx} \cos x$

2.  $\frac{d}{dx} \tan x$

1.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin(x + \frac{h}{2}) \sin \frac{h}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ -\sin(x + \frac{h}{2}) \right\} \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

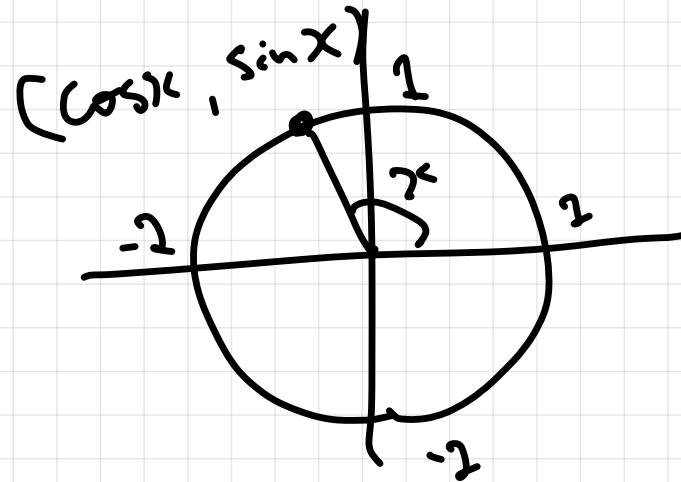
$$= -\sin x$$

$$2. \frac{d}{dx} \tan x$$

$$= \frac{d}{dx} \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$



$$\Rightarrow \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

## < 演習 >

$$1. \frac{d}{dt} \sin(\omega t + \theta)$$

$$2. \frac{d}{dx} \cos(\sin x)$$

$$3. \frac{d}{dx} \frac{1}{\cos x}$$

$$4. \frac{d}{dt} \sqrt{\tan 2t}$$

$$5. \frac{d}{dx} (\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$\begin{aligned} 1. & \frac{d}{dt} \sin(\omega t + \theta) \\ &= \frac{d \sin(\omega t + \theta)}{d(\omega t + \theta)} \frac{d(\omega t + \theta)}{dt} \end{aligned}$$

$$= \cos(\omega t + \theta) \cdot \omega$$

$$= \omega \cos(\omega t + \theta)$$

$$2. \frac{d \cos(\sin x)}{d(\sin x)} \frac{d(\sin x)}{dx}$$

$$= -\sin(\sin x) \cdot \cos x$$

$$3. \frac{d}{dx} \frac{1}{\cos x}$$

$$= \frac{-\sin x}{\cos^2 x}$$

$$= -\frac{\tan x}{\cos x}$$

$$4. \frac{d}{dt} \sqrt{\tan 2t}$$

$$= \frac{d(\tan^{\frac{1}{2}} 2t)}{d(\tan 2t)} \cdot \frac{d(\tan 2t)}{d(2t)} \cdot \frac{d(2t)}{dt}$$

$$\frac{1}{2} \tan^{-\frac{1}{2}} 2t \cdot \frac{1}{\cos^2 2t} \cdot 2$$

$$= \frac{1}{\cos^2 2t \sqrt{\tan 2t}}$$

$$5. \frac{d}{dx} 1 = 0$$

u, v, t

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

### < 演習 >

$$1. \int \sin 2x \, dx$$

$$2. \int \frac{\sin^2 x + 1}{\cos^2 x} \, dx$$

$$1. \int \sin 2x \, dx$$

$$= -\frac{1}{2} \cos 2x + C$$

$$2. \int \frac{\sin^2 x + 1}{\cos^2 x} \, dx$$

←  $1 - \cos^2$

$$= \int \frac{2 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx$$

$$= 2 \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx$$

$$= 2 \tan x - x + C$$

## 2階微分方程式

1 種類のみ

$$\frac{d^2}{dt^2} f(t) = -\omega^2 f(t) \text{ の解は.}$$

( $\omega \neq 0$ )

$$f(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

or

$$f(t) = a \sin(\omega t + \theta)$$

A, B, a,  $\theta$

積分定数

$$\frac{d^2}{dt^2} (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

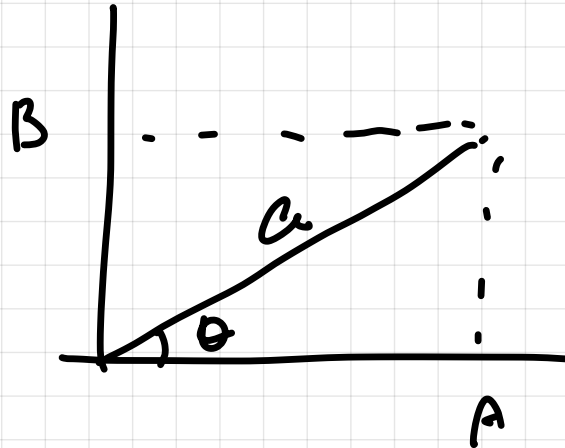
$$= \frac{d}{dt} (-A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t)$$

$$= (-A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t)$$

$$= -\omega^2 (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

$$= -\omega^2 f(t)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dt^2} (a \sin(\omega t + \theta)) \\
&= \frac{d}{dt} (a\omega \cos(\omega t + \theta)) \\
&= -a\omega^2 \sin(\omega t + \theta) \\
&= -\omega^2 f(t)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& a \sin(\omega t + \theta) \\
&= a \sin \omega t \cos \theta + a \cos \omega t \sin \theta \\
&= \underbrace{(a \sin \theta)}_{=A} \cos \omega t + \underbrace{(a \cos \theta)}_{=B} \sin \omega t
\end{aligned}$$

2次元ベクトル.

A, B  
or

a, θ は初期条件で決まる.

## < 演習 >

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ \dot{f}(0) = 0 \end{cases} \quad \omega \neq 0.$$

$$\ddot{f}(t) = -\omega^2 f(t) \quad \omega \neq 0.$$

$$f(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$\omega \neq 0$  とき  $A = B = 1$ .

$$\dot{f}(t) = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t$$

$$f(0) = A = 1.$$

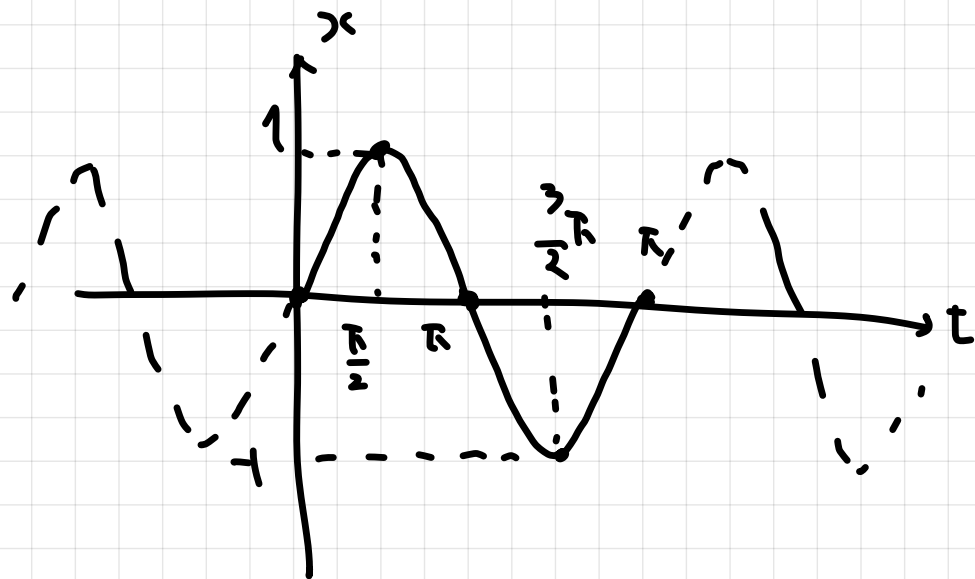
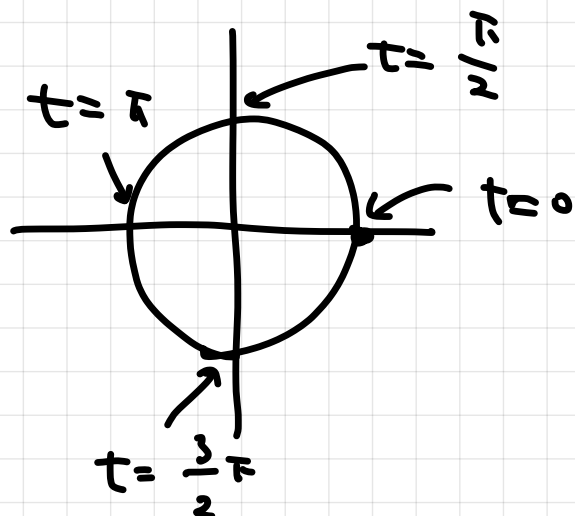
$$\dot{f}(0) = B\omega = 0 \quad \omega \neq 0 \rightarrow B = 0.$$

$\Downarrow$

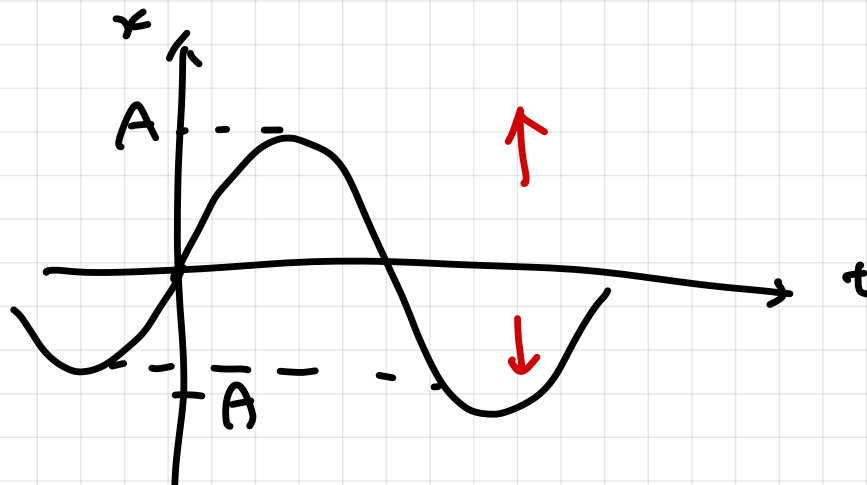
$$f(t) = \cos \omega t$$

# 三角関数 a 777

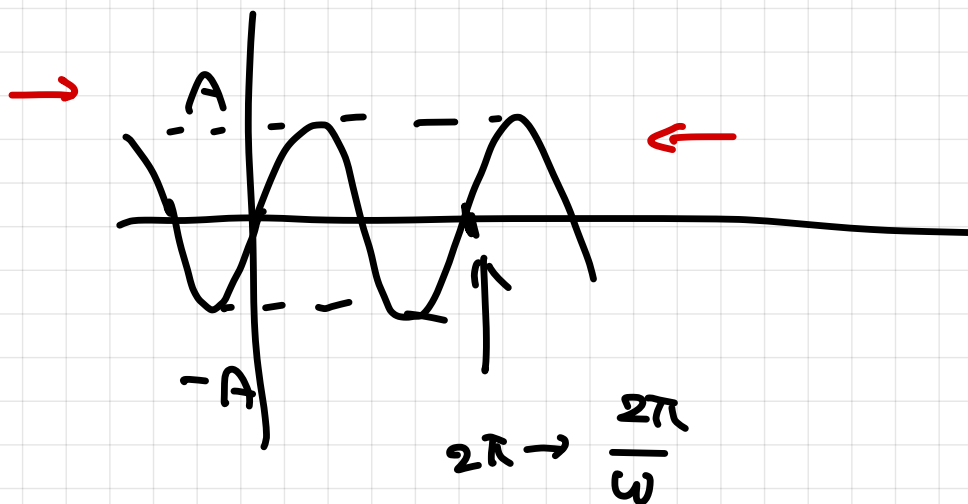
$$x = \sin t$$



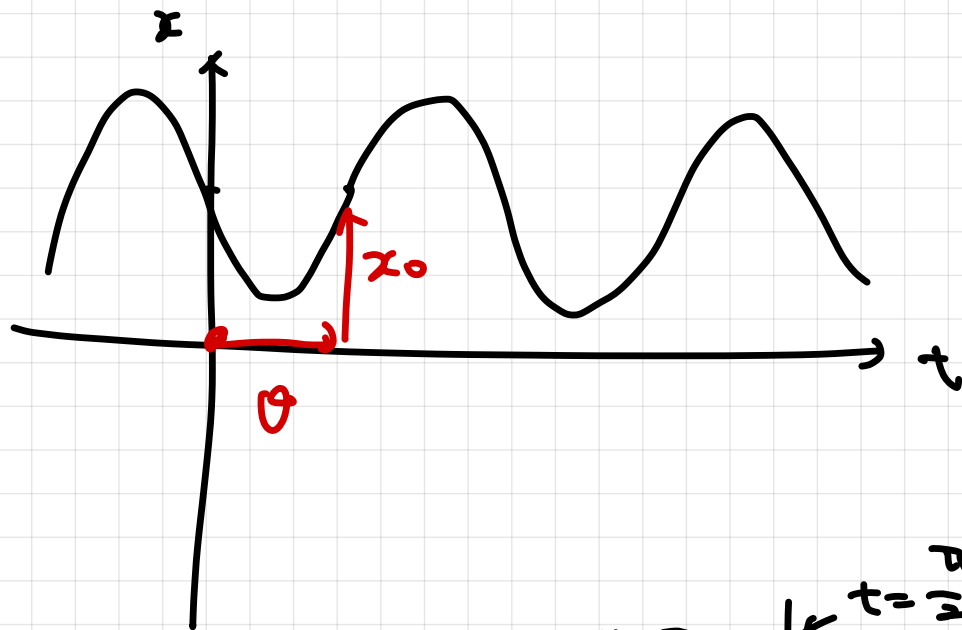
$$x = A \sin t$$



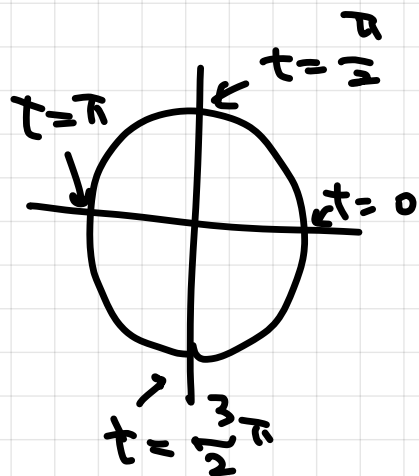
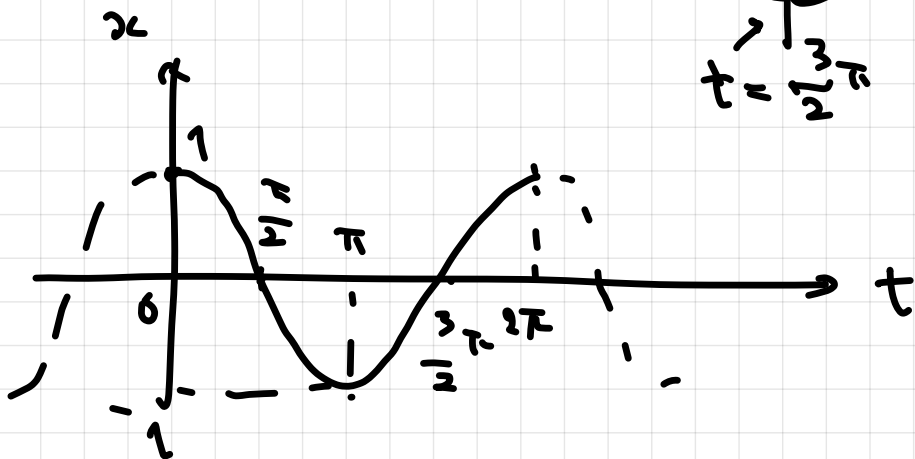
$$x = A \sin \omega t$$



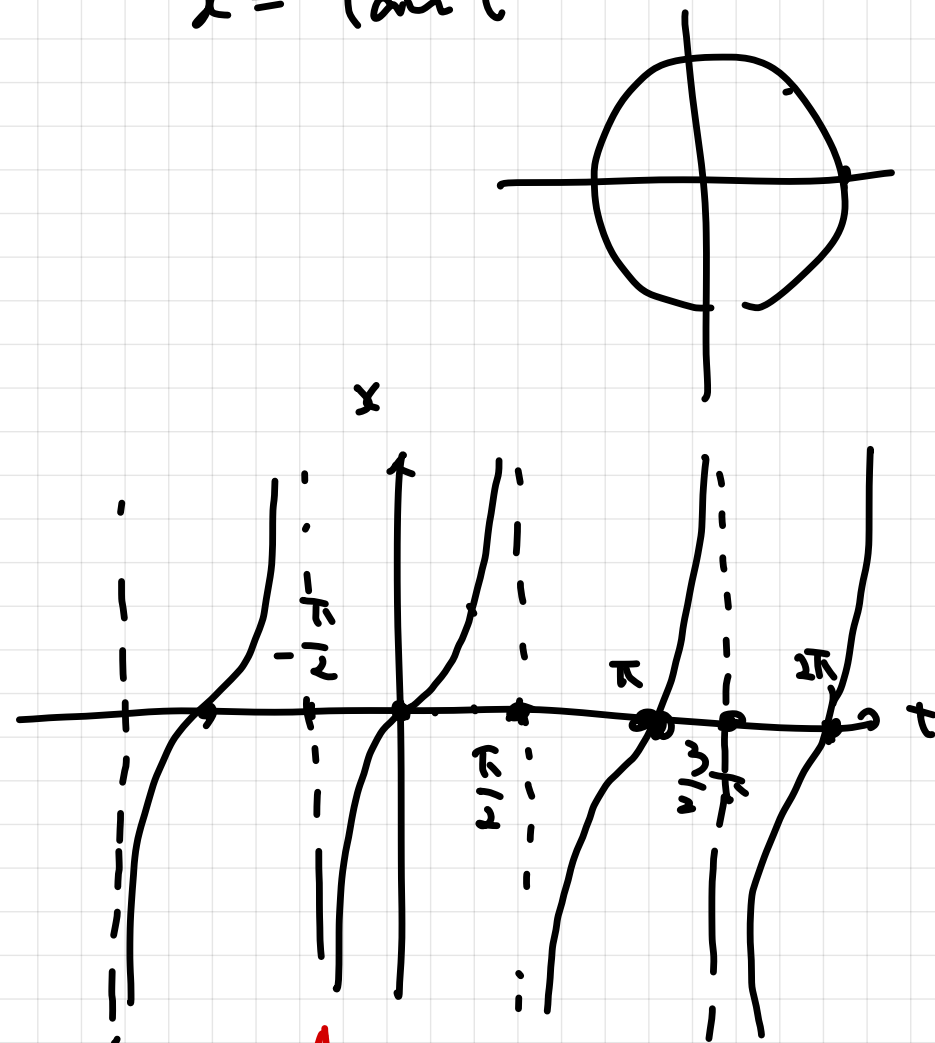
$$x = A \sin \omega(t - \theta) + x_0$$



$$x = \cos t$$



$$x = \tan t$$



$-\frac{\pi}{2}$   
 $\frac{\pi}{2}$   
 定数で決まらない。

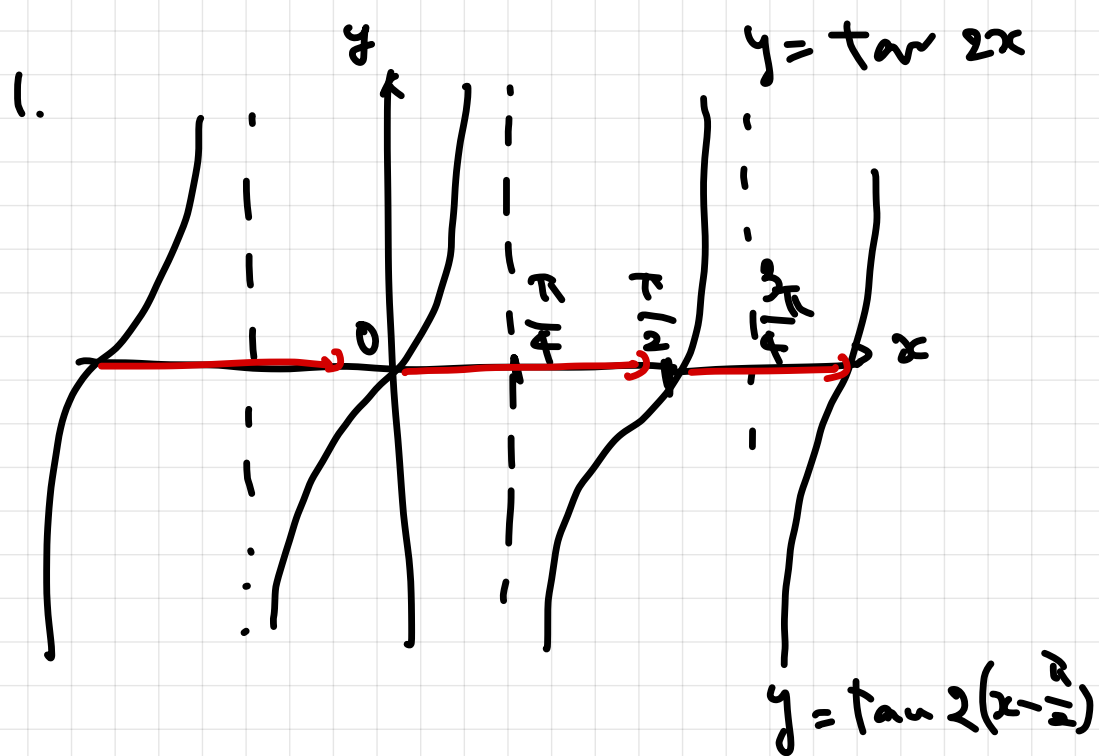
# < 演習 >

1.  $y = \tan 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

2. 
$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \dot{f}(0) = v_0 \end{cases}$$

$$\ddot{f}(t) = -\omega^2 f(t) \quad \omega \neq 0$$

$$y = f(t) \quad \text{a "y"}$$



$$* \tan(2x + \pi)$$

$$= \frac{\tan 2x + \tan \pi}{1 - \tan 2x \tan \pi} = \tan 2x$$

$$2. \quad \ddot{f}(t) = -\omega^2 f(t), \quad f(0) = 0.$$

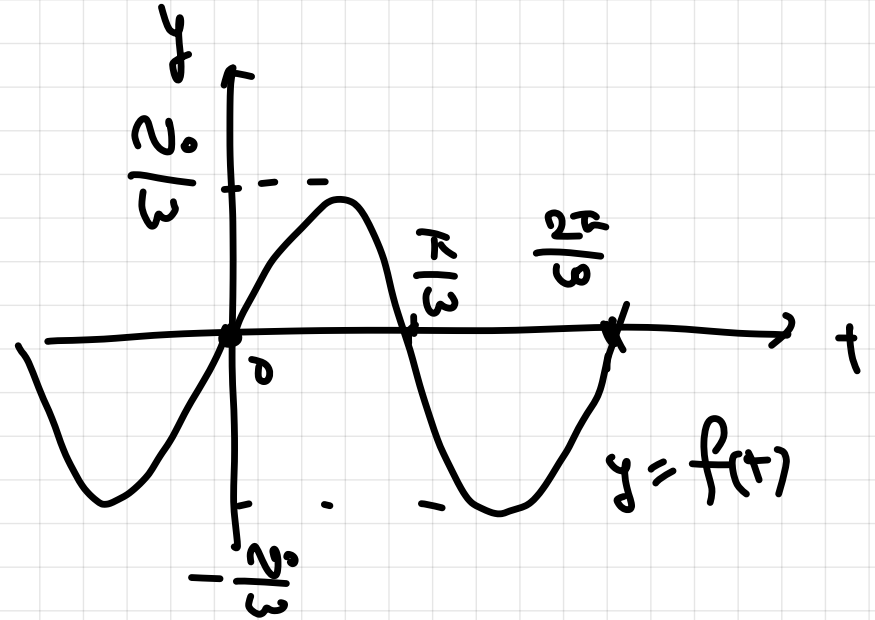
$$f(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$\dot{f}(t) = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t$$

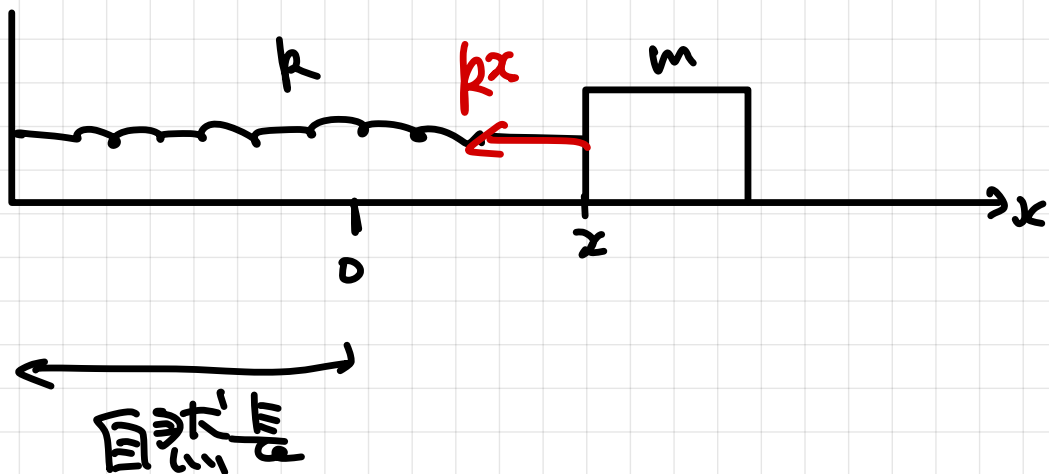
$$f(0) = A = 0$$

$$\dot{f}(0) = B\omega = v_0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{v_0}{\omega}$$

$$f(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$



# 単振動



## 運動方程式

$$m a(t) = -kx(t)$$

$$m \ddot{x}(t) = -kx(t)$$

$$\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}x(t)$$

$$\frac{k}{m} = \omega^2 \quad \text{とおくと}$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$$

$$\Rightarrow x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

初期条件

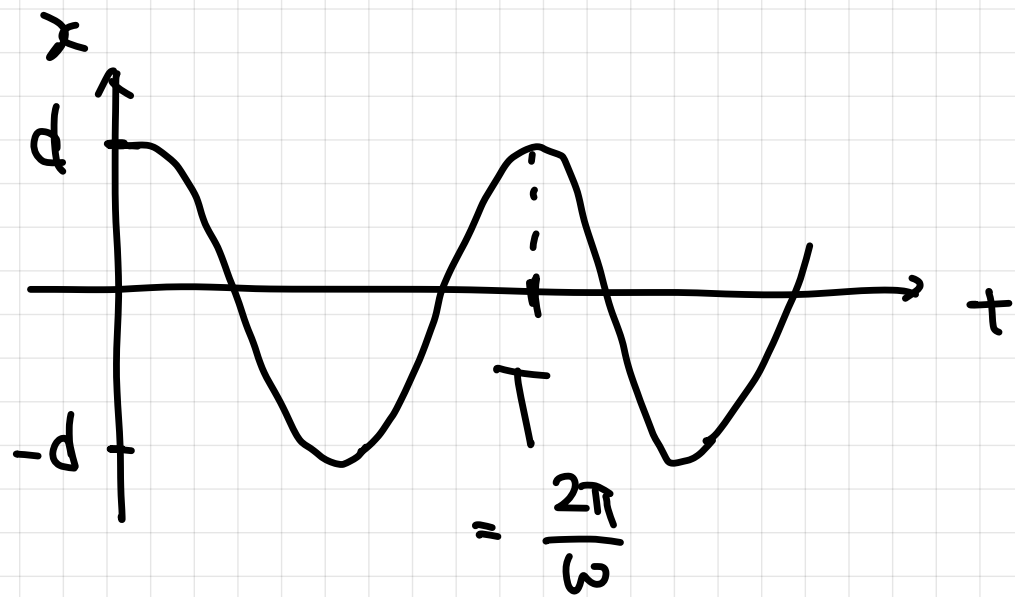
$$x(0) = d$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

$$x(0) = A = d$$

$$\dot{x}(0) = B\omega = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$x(t) = d \cos \omega t = d \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$$



速さの最大値  $v_{\max}$

$$\dot{x}(t) = -d\omega \sin \omega t$$

$$\leq d\omega$$

周期  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

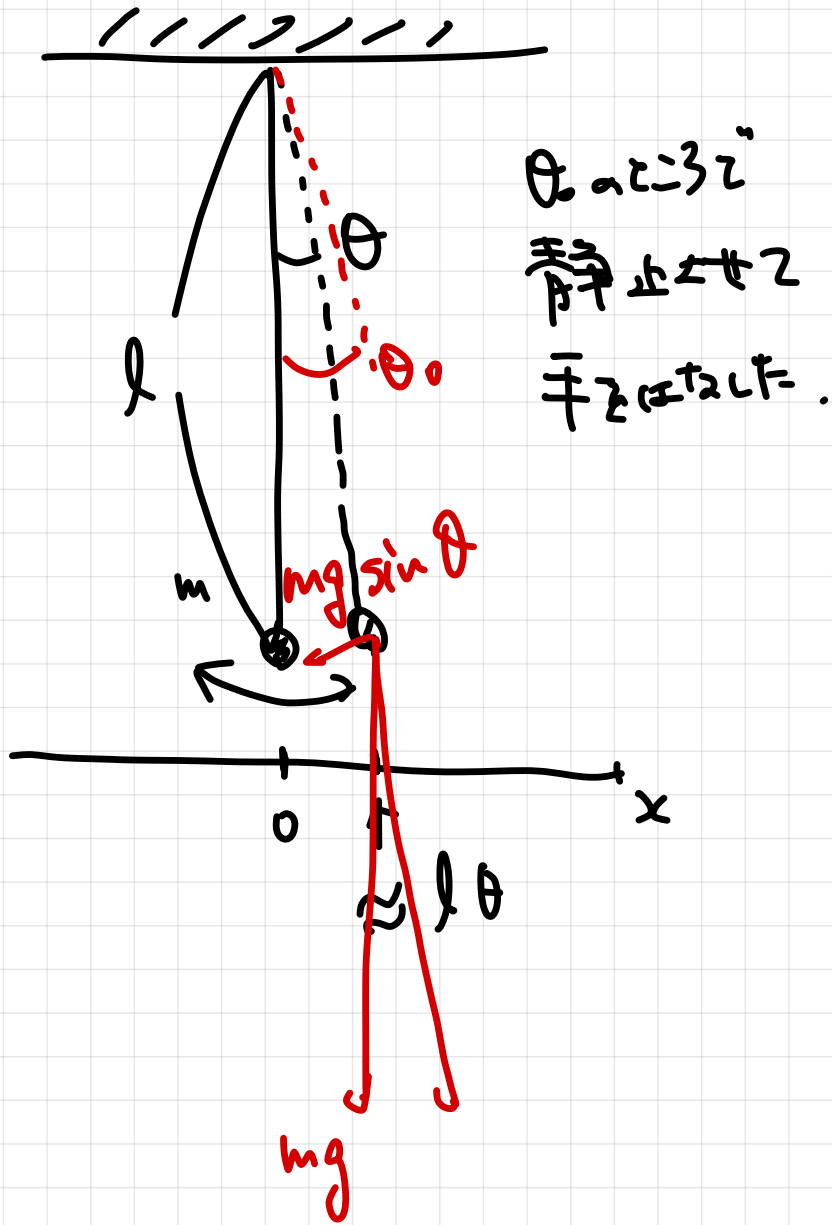
$$d\sqrt{\frac{k}{m}} = v_{\max}$$

箱の質量  $m$  が大  $\Rightarrow$  周期  $T$  が大

ばねの固さ  $k$  が大  $\Rightarrow$  周期  $T$  が小

振幅  $\times$  角速度

$mg \sin \theta$  is the restoring force.



$\theta$  is small  
 $\sin \theta \approx \theta$   
 $\cos \theta \approx 1$

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

$$x \approx l\theta$$

or

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \quad \text{or} \quad \theta \ll 1 \Rightarrow \sin \theta \approx \theta$$

$$\ddot{x} = -g \sin \theta$$

$$\approx -g \cdot \theta$$

$$\approx -g \cdot \frac{x}{l}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -\frac{g}{l} x$$

$$\frac{g}{l} = \omega^2 \quad \text{or} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t) \rightarrow \text{解は}$$

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

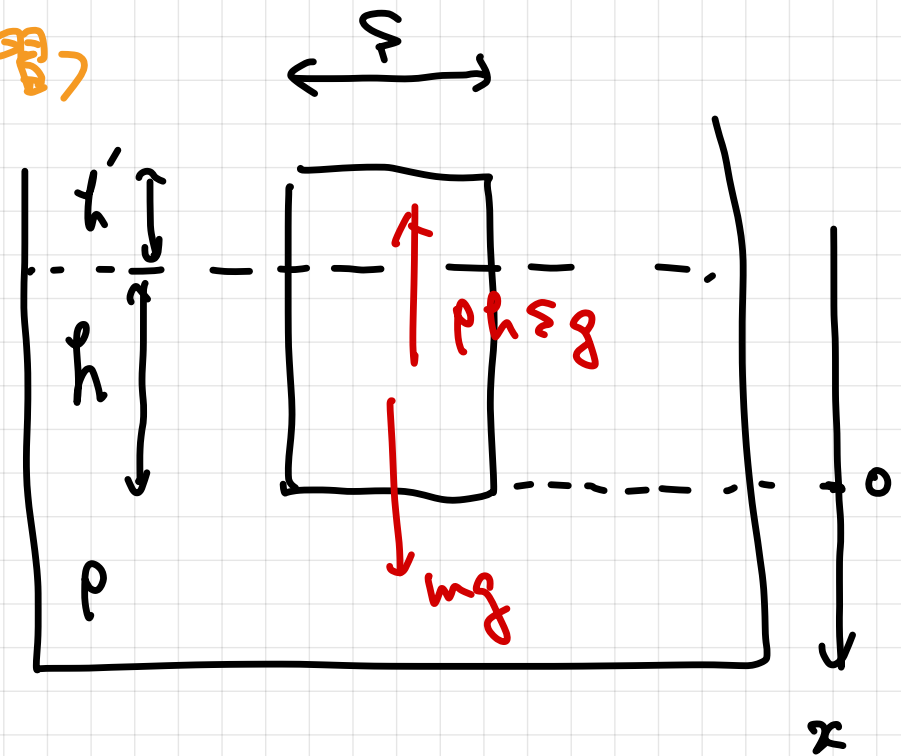
$$x(0) = l\theta_0 = A$$

$$\dot{x}(0) = 0 = B\omega \Rightarrow B = 0.$$

$$x(t) = l\theta_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t$$

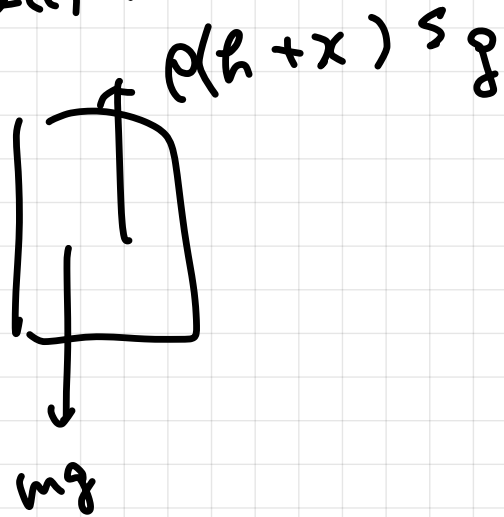
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \leftarrow \text{糸が長いほど} \\ \text{周期は大きくなる}$$

< 練習 >



$x=0$  かつ  $d (< h')$  付近 (3次元)  
手ははらず.

1.1.1:  $x(t)$  a. z. z.



$$\begin{aligned}
 m a &= m g - \rho(h+x) S g \\
 &= \underbrace{m g - \rho h S g}_{=0} - \rho S g x \\
 &= -\rho S g x
 \end{aligned}$$

$$Q = - \underbrace{\frac{\rho S g}{m}}_{=\omega^2} x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{m}{\rho S g}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\rho S g}{m}}$$

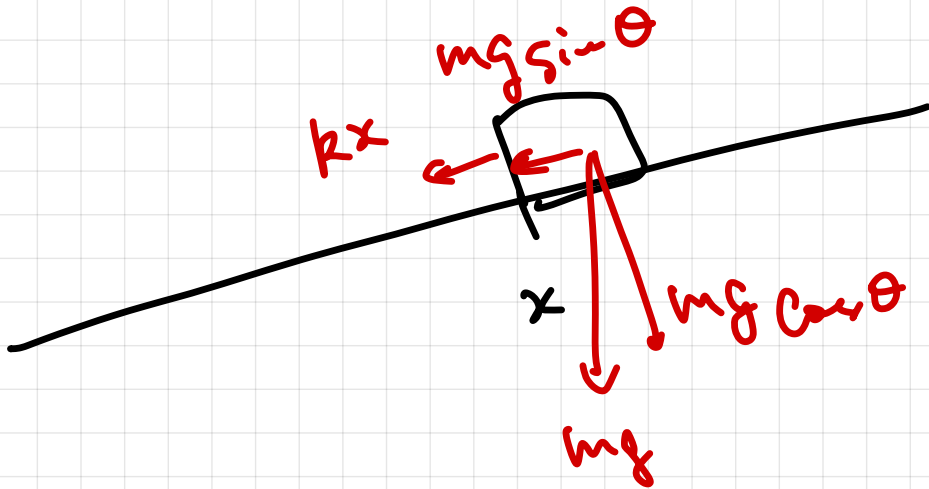
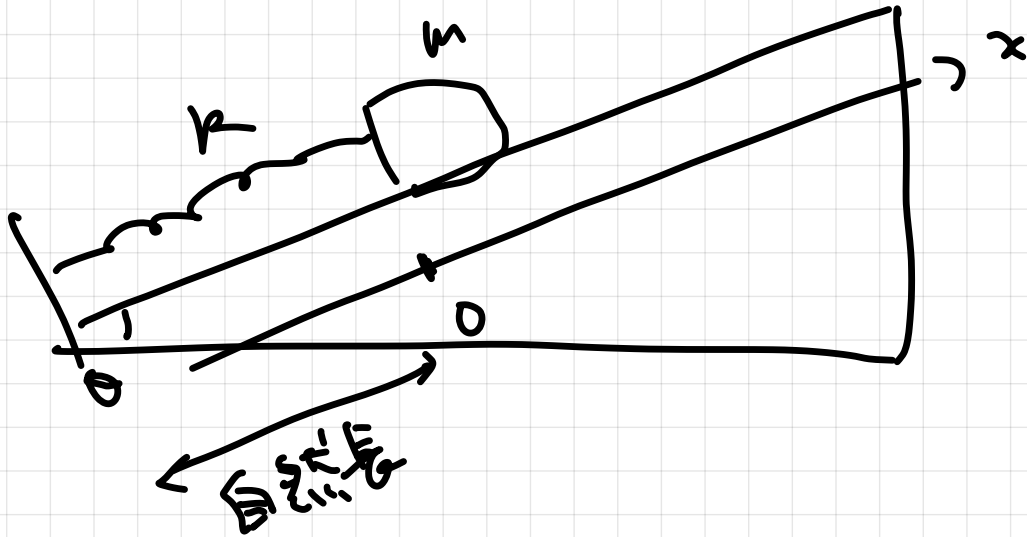
$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$\dot{x}(t) = -A \omega \sin \omega t + B \omega \cos \omega t$$

$$x(0) = A = d$$

$$\dot{x}(0) = B \omega = 0 \quad \beta = 0$$

$$x(t) = d \cos \sqrt{\frac{m}{\rho S g}} t$$



$$ma = -mg \sin \theta - kx$$

$$a = -\frac{k}{m}x - g \sin \theta$$

$$= -\frac{k}{m} \left( x + \frac{mg \sin \theta}{k} \right)$$

$f(t)$

$$\ddot{f}(t) = a \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x + \frac{mg \sin \theta}{k} = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$\frac{mg \sin \theta}{k} = A$$

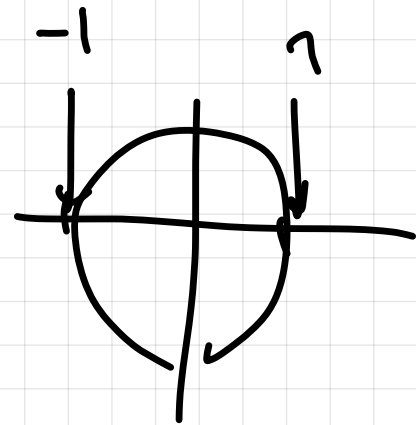
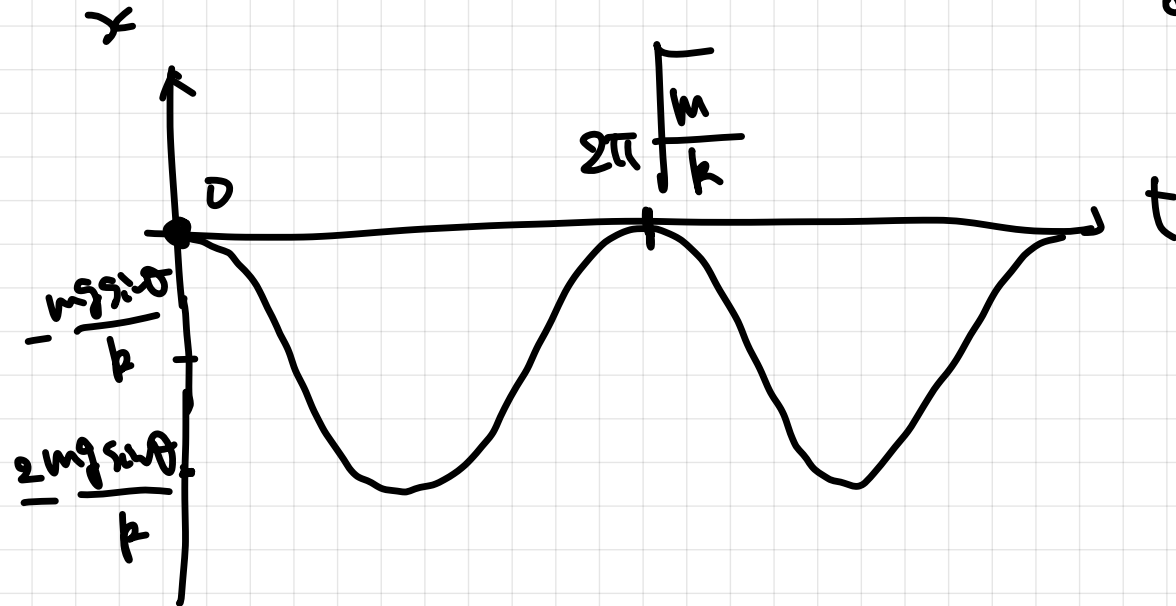
$$\dot{x} = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t$$

$$\dot{x} = B\omega = 0 \quad B = 0$$

$$x + \frac{mg \sin \theta}{k} = \frac{mg \sin \theta}{k} \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

$$x = - \frac{mg \sin \theta}{k} \left( 1 - \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \right)$$

~~~~~  
0 ~ 2



< 目標 >

等速・非等速 円運動

* 単振動の 2次元 ver. + α

媒介変数表示 = 軌跡

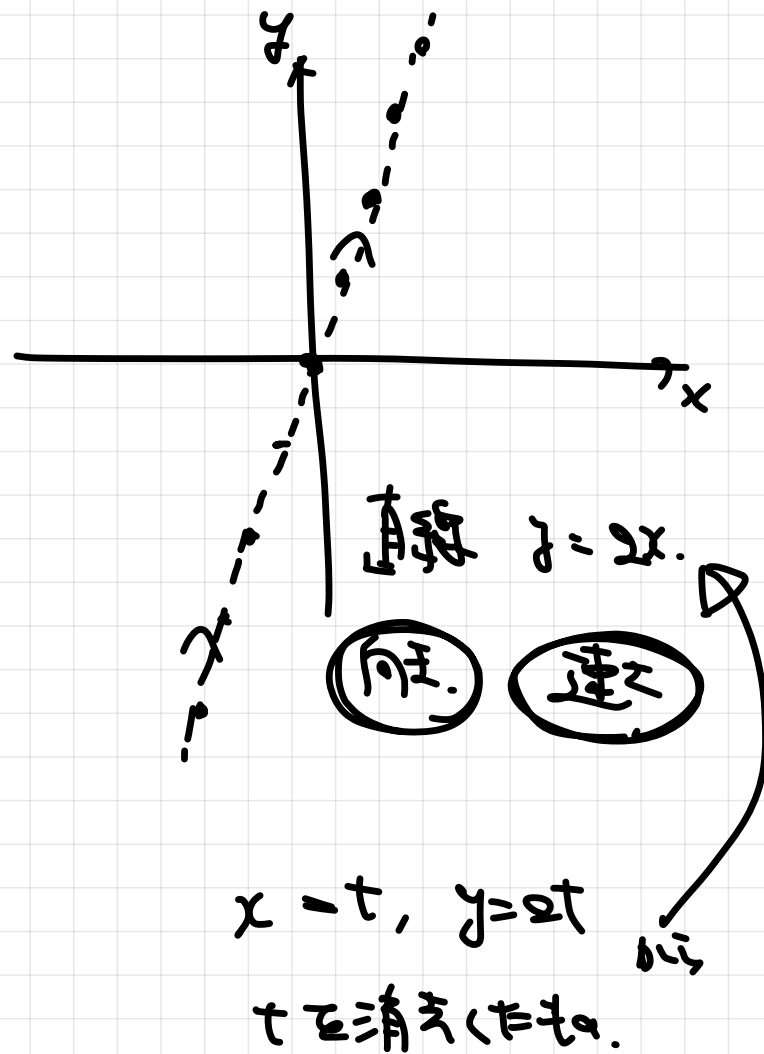
$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} \rightarrow$$

$\therefore \vec{x}$ は、一旦、空間上の点。
" " " " " " " " " " " "

と「時刻」、この媒介変数 t

を使って記述する方法は「媒介変数表示」

と y と x に変える。



$$\Rightarrow y = 2 \frac{t}{x} = 2x$$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t^2 \end{pmatrix} : \text{質点の位置}$$

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4t \end{pmatrix}$$

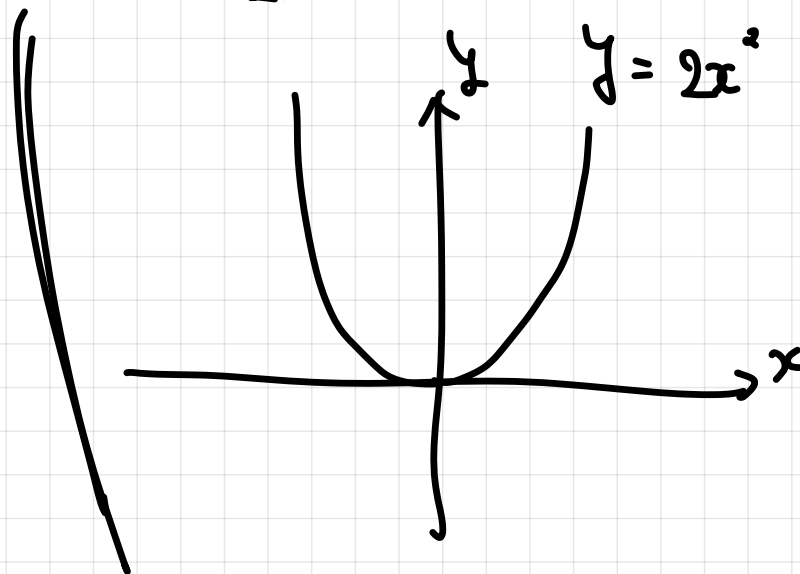
$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$-\infty \leq t \leq \infty \quad \text{c"}$$

質点の運動が $t=0$ から $t=2$ まで
「軌跡」は?

$$x = t, \quad y = 2t^2$$

$$\begin{aligned} y &= 2t^2 \\ &= 2x^2 \end{aligned}$$



$t \geq 0$ のとき ($t=0$ から $t=2$ まで) に 運動する質点の
軌跡は 求めらる。

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -2t \\ 8t^2 \end{pmatrix} \quad \text{2"t 同様に軌跡を求めよ。}$$

< 演習 >

原点 O.

$$\vec{OP}(t) = \begin{pmatrix} r \cos \omega t \\ r \sin \omega t \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ P: 描く軌跡は?

t を消え

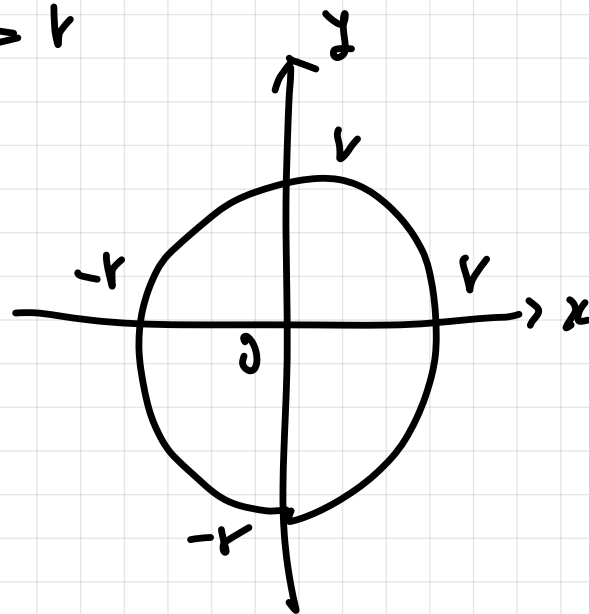
$$\begin{cases} x = r \cos \omega t \\ y = r \sin \omega t \end{cases}$$

$$x^2 = r^2 \cos^2 \omega t$$

$$y^2 = r^2 \sin^2 \omega t$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) \\ &= r^2. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$$



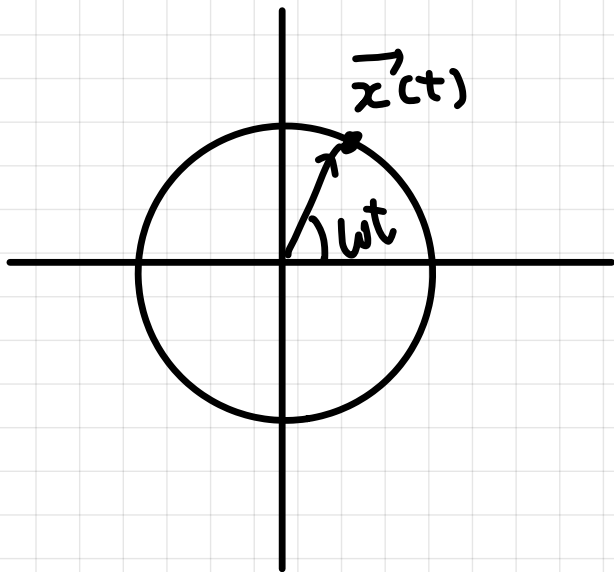
* 数式では少し細かなところを省略するハズ.

等速円運動

質量 m の質点、位置

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r \cos \omega t \\ r \sin \omega t \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} r, \omega \\ \text{定数} \end{matrix}$$

⇒ 半径 r の等速円運動



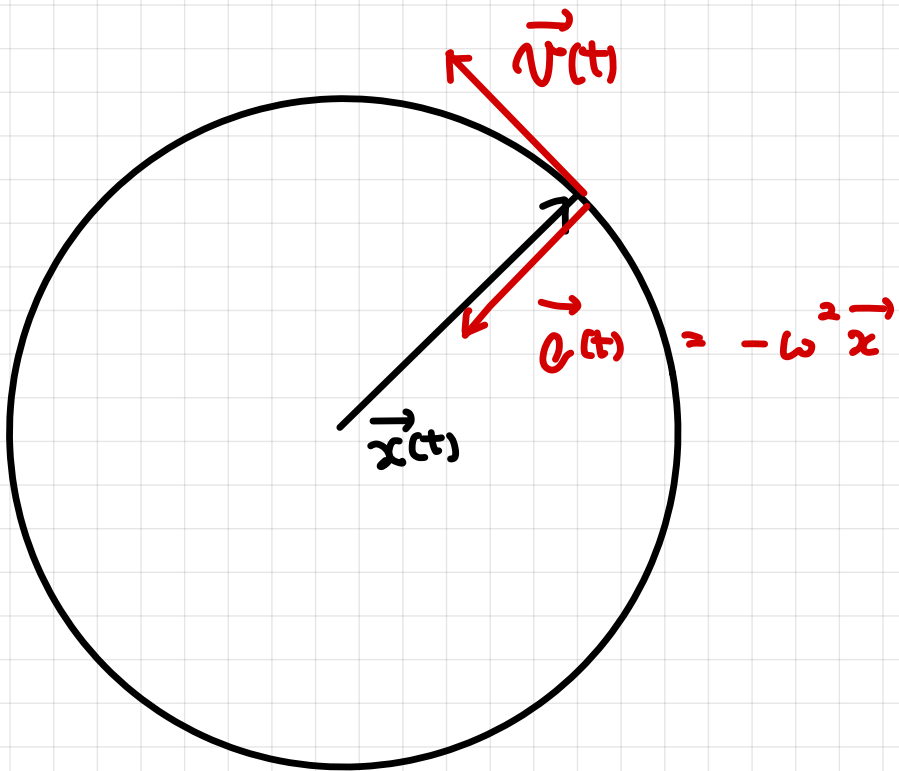
$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -r\omega \sin \omega t \\ r\omega \cos \omega t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\vec{v}|^2 &= r^2 \omega^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) \\ &= r^2 \omega^2 \end{aligned}$$

$$|\vec{v}| = r\omega : \text{定数} = \text{等速}$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \begin{pmatrix} -r\omega^2 \cos \omega t \\ -r\omega^2 \sin \omega t \end{pmatrix} = -\omega^2 \vec{x}$$

$\vec{a}$: 加速度 $\propto$ 半径 r の 向心力 $\vec{F}$ が必要



$$\vec{F} = m \vec{a} = -m\omega^2 \vec{x}$$

向心力は中心に向かって向く。

円運動

円運動の周期は

$$T = \frac{2\pi r}{r\omega} = \frac{2\pi}{\omega}$$

基本的には単振動と同じ。

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r \cos(\omega t + \theta) \\ r \sin(\omega t + \theta) \end{pmatrix}$$

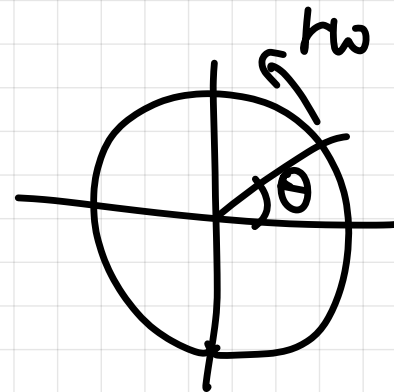
θ : 初期位相

ω : 角速度。

$$v = r\omega$$

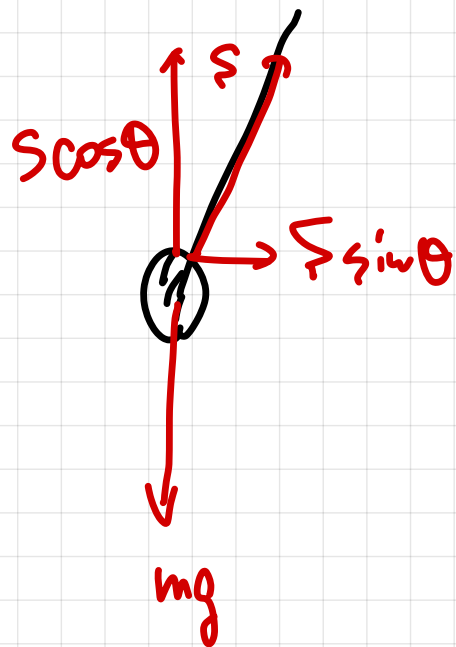
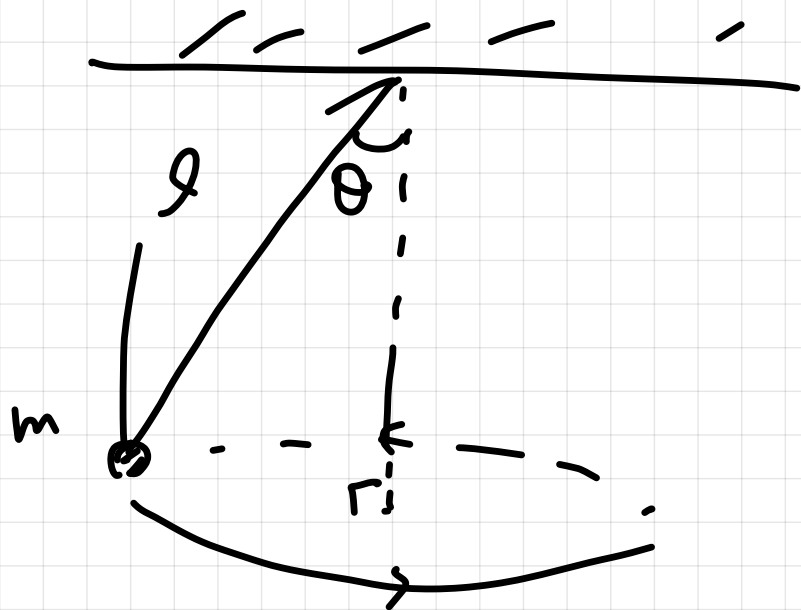
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

向心力 $|\vec{F}| = m\omega^2 r$



< 演習 >

円錐3.43



鉛直方向の力

$$\rightarrow S \cos \theta = mg$$

$$S = \frac{mg}{\cos \theta}$$

水平方向

$$S \sin \theta = m \cdot \omega^2 \cdot l \sin \theta$$

$$\frac{mg}{\cos \theta} = m \omega^2 l$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l \cos \theta}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \theta}{g}}$$

$$v = r\omega$$

$$= l \sin \theta \cdot \sqrt{\frac{g}{l \cos \theta}}$$

$$= \sqrt{gl \tan \theta \sin \theta}$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$0 < \tan \theta < \infty$$

$$0 < \sin \theta < 1$$

$$\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} \rightarrow v \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\theta \rightarrow 0 \rightarrow v \rightarrow 0$$

非等速円運動

$$\begin{aligned} |\vec{F}| &= m \omega^2 |\vec{r}| \\ &= m \omega^2 r = m \frac{v^2}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r\omega &= v \\ \omega &= \frac{v}{r} \end{aligned}$$

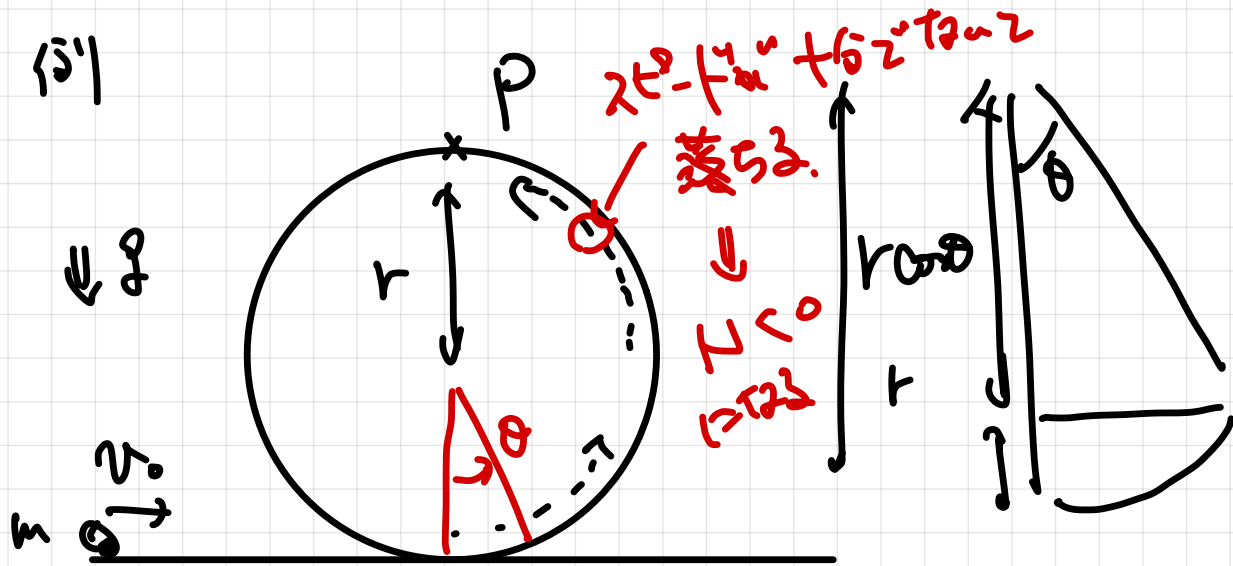
非等速とは、

v も ω も t 依存

$$|\vec{F}| = m \frac{v^2}{r} \text{ の } \frac{1}{r} \text{ が } r \text{ に依存する。}$$

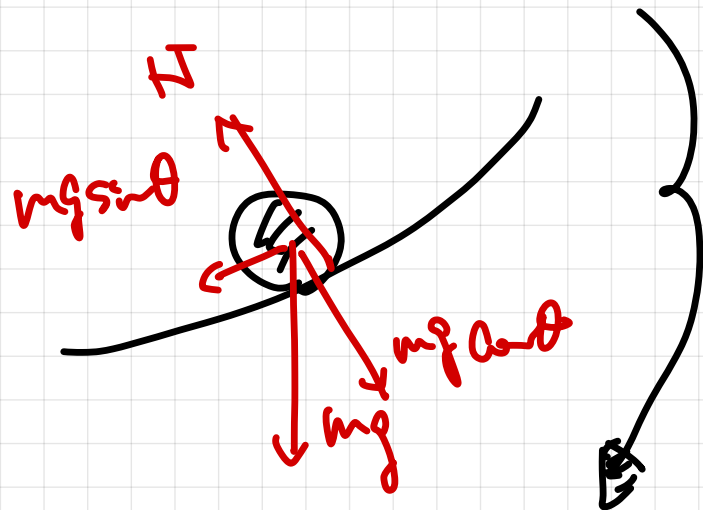
- ① エネルギー保存則より $v^2 (r, v)$ を出す
- ② 運動方程式に代入する。

例)



θ 位置での運動方程式

$$m \frac{v(\theta)^2}{r} = N - mg \cos \theta$$



θ 位置での運動方程式

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + m g \cdot 0 = \frac{1}{2} m v(\theta)^2 + m g r (1 - \cos \theta)$$

$$v(\theta)^2 = v_0^2 - 2 g r (1 - \cos \theta)$$

$$N = m \frac{v(\theta)^2}{r} + mg \cos \theta$$

$$N = \frac{m}{r} \cdot (v_0^2 - 2gr + 2gr \cos \theta) + mgr \theta$$

$$= \frac{m}{r} v_0^2 - 2mg + 2mg \cos \theta$$

N , 最小値 > 0 となる。OK.

これはOK.

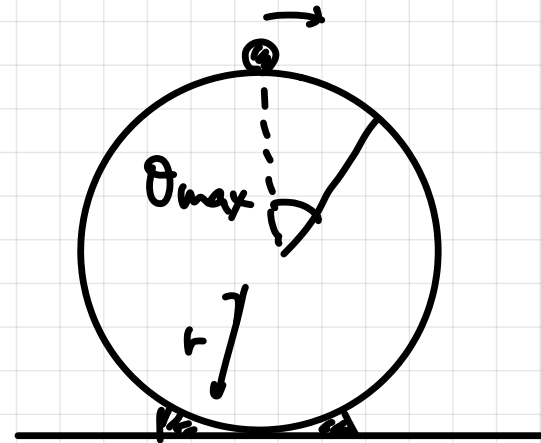
$$N_{\min} = \frac{m}{r} v_0^2 - 2mg - 3mg > 0$$

$$v_0^2 > 5gr$$

$$v_0 > \sqrt{5gr}$$

< 演習 >

速度 v の $2\pi r$ 分の t

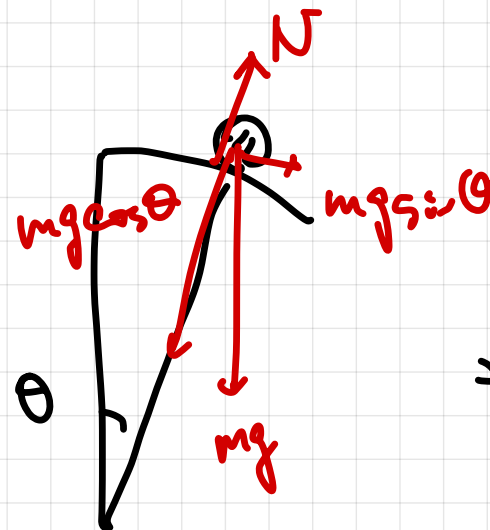


$\theta_{\max}$ 2'

円周角

120° 以上

$\theta_{\max}(r)$



$$\frac{1}{2} m v_0^2 + mg \cdot r$$

↑
中心からの距離

$$= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 +$$

$$mg r \cos \theta$$

$$\frac{1}{2} m v^2(\theta) = mgr(1 - \cos \theta)$$

$$N = 0 \quad \text{an der Stelle } \{ \pm \frac{\pi}{2} \}$$

$$v^2(\theta) = 2gr(1 - \cos \theta)$$

$$3 \cos \theta_{\max} - 2 = 0$$

$$\cos \theta_{\max} = \frac{2}{3}$$

$$m \frac{v^2(\theta)}{r} = mg \cos \theta - N$$

$$N = mg \cos \theta - \frac{m}{r} \cdot 2gr(1 - \cos \theta)$$

$$= mg(3 \cos \theta - 2)$$

< 目標 8 >

角運動量 保存

↑↑^o↑ - 第2法則

* 高校物理 & 数学 と 1/2 超える

ベクトルの外積

* ベクトルの内積は.

2つのベクトルから
スカラー値を生成する操作

$$\vec{x}, \vec{y} \rightsquigarrow \text{内積} \rightsquigarrow \vec{x} \cdot \vec{y}$$

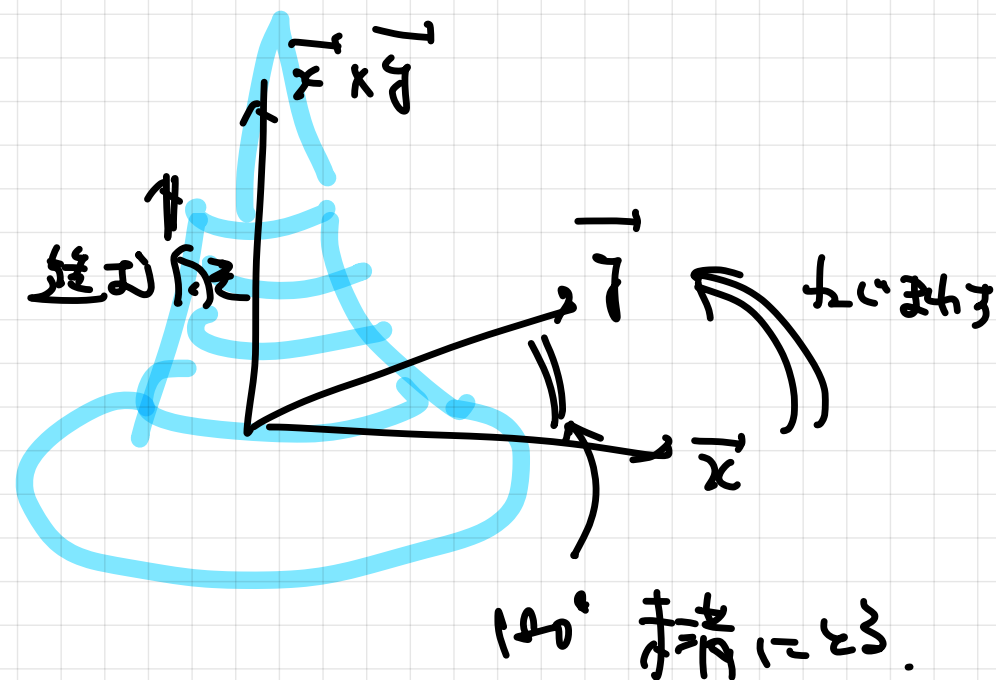
外積は. 2つのベクトルから
新たなベクトルを生成する操作

$$\vec{x}, \vec{y} \rightsquigarrow \text{外積} \rightsquigarrow \vec{x} \times \vec{y}$$

$$\vec{x} \times \vec{y} = \text{ベクトル}$$

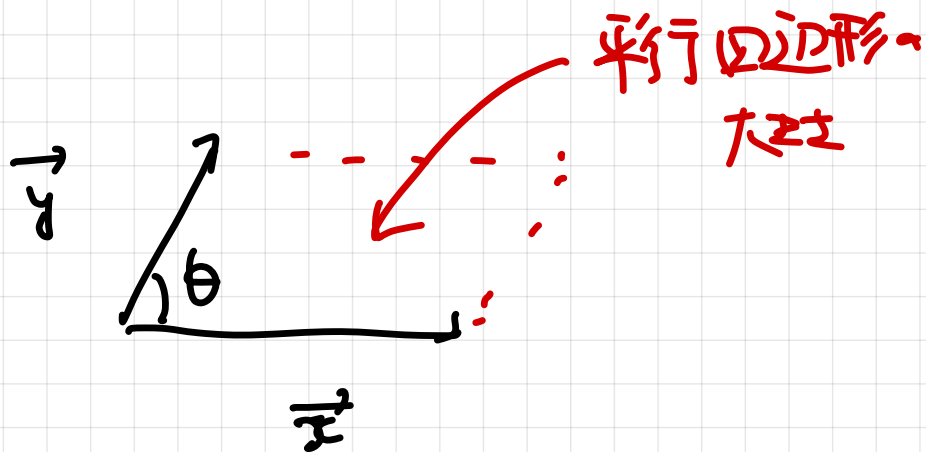
向きと大きさを定義して表現できる
ベクトル.

向き : 右ねじの法則



大正

$$|\vec{x} \times \vec{y}| = \underline{\underline{|\vec{x}| |\vec{y}| \sin \theta}}$$



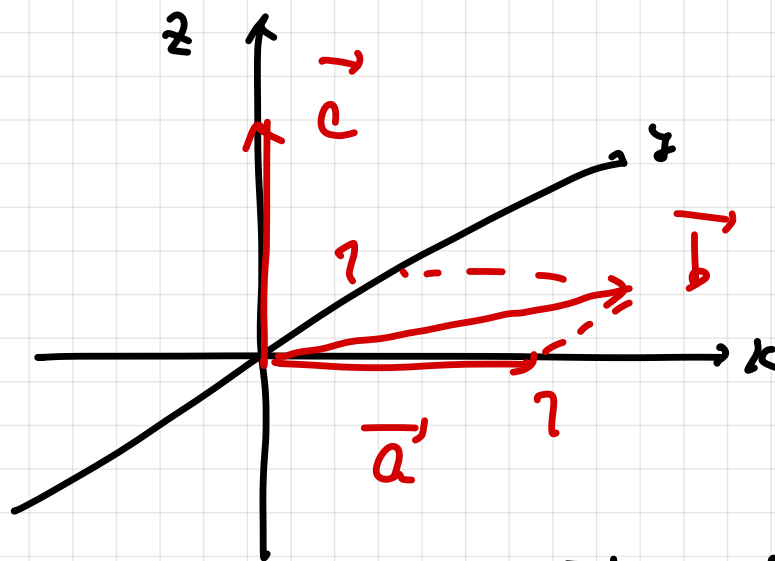
$\theta = 0 \dots \pi$ 平行-大正.
 $\vec{x} \parallel \vec{y} \rightarrow \vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$
 大正. 大正.

$$\vec{x} \times \vec{x} = \vec{0}$$

151

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad \text{は?}$$



$$|\vec{a}| = 1.$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{2},$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad |\vec{c}| = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1.$$

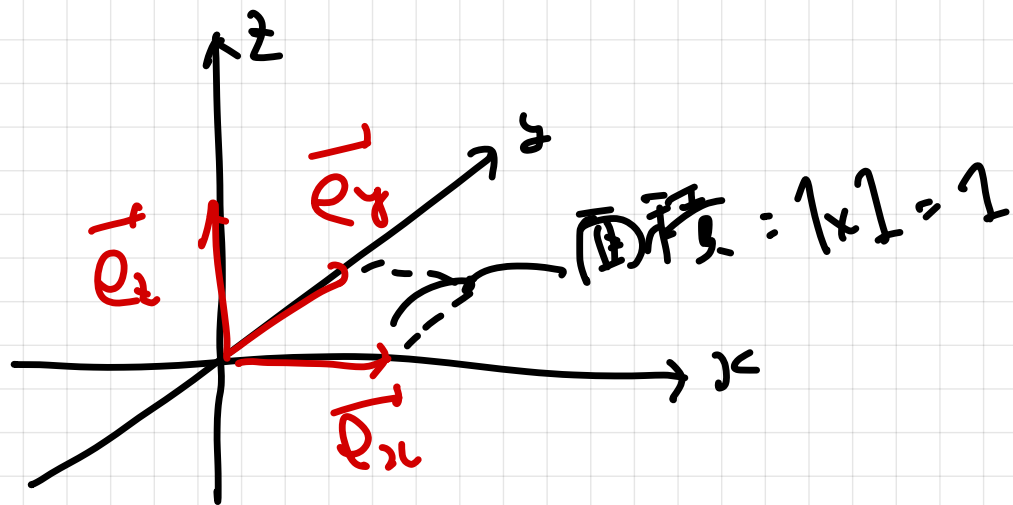
$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

< 演習 >

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1 次方

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y, \vec{e}_y \times \vec{e}_z, \vec{e}_z \times \vec{e}_x, \\ \vec{e}_y \times \vec{e}_x, \vec{e}_z \times \vec{e}_y, \vec{e}_x \times \vec{e}_z, \text{ etc?}$$



$$\begin{cases} \vec{e}_z \times \vec{e}_y = \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \times \vec{e}_x = -\vec{e}_z \end{cases}$$

$$\left(\text{一般に} \right. \\ \left. \vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x} \right)$$

同様に

$$\vec{e}_y \times \vec{e}_z = -\vec{e}_z \times \vec{e}_y = \vec{e}_x$$

$$\vec{e}_z \times \vec{e}_x = -\vec{e}_x \times \vec{e}_z = \vec{e}_y$$

分配則.

$$(A\vec{a} + B\vec{b}) \times (C\vec{c} + D\vec{d})$$

$$= A(C\vec{a} \times \vec{c} + B\vec{b} \times \vec{c} + A\vec{a} \times \vec{d} + B\vec{b} \times \vec{d})$$

<演習>

$$(1) (2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (3\vec{a} + \vec{b})$$

$$(2) (2\vec{a} + \vec{b}) \times (3\vec{a} + \vec{b})$$

$$(1) 6|\vec{a}|^2 + 5\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$(2) 3\vec{b} \times \vec{a} + 2\vec{a} \times \vec{b} \\ = -\vec{a} \times \vec{b}$$

$$(3) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$\vec{x} \times \vec{y} \neq ?$$

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_x + x_2 \vec{e}_y + x_3 \vec{e}_z$$

$$\vec{y} = y_1 \vec{e}_x + y_2 \vec{e}_y + y_3 \vec{e}_z$$

$$\begin{aligned} \vec{x} \times \vec{y} &= (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{e}_x \times \vec{e}_y \\ &\quad + (x_2 y_3 - x_3 y_2) \vec{e}_y \times \vec{e}_z \\ &\quad + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \vec{e}_z \times \vec{e}_x \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

< 练习 >

$$1. \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$2. \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} r \cos \omega t \\ r \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -r\omega \sin \omega t \\ r\omega \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$1. \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) - (-2) \cdot 3 \\ 3 \cdot (-3) - (-1) \cdot 1 \\ 1 \cdot (-2) - (-3) \cdot 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$2. \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} r \sin \omega t \cdot 0 - r\omega \cos \omega t \cdot 0 \\ 0 \cdot (-r\omega \sin \omega t) - 0 \cdot r \cos \omega t \\ r^2 \omega \cos^2 \omega t + r^2 \omega \sin^2 \omega t \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r^2 \omega \end{pmatrix}$$

内積と外積の時間微分

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$$

2つの関数の
積の微分公式

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{x} \cdot \vec{y}) = \dot{x}_1 y_1 + \dot{x}_2 y_2 + \dot{x}_3 y_3 + x_1 \dot{y}_1 + x_2 \dot{y}_2 + x_3 \dot{y}_3 = \dot{\vec{x}} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \dot{\vec{y}}$$

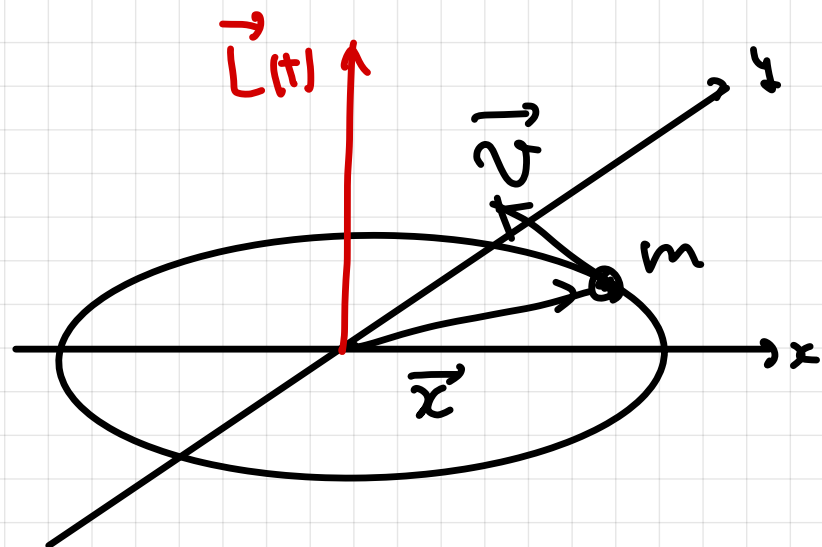
$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - y_2 x_3 \\ x_3 y_1 - y_3 x_1 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{x} \times \vec{y})_1 = \dot{x}_2 y_3 - y_2 \dot{x}_3 + x_2 \dot{y}_3 - \dot{y}_2 x_3$$

$$= (\dot{\vec{x}} \times \vec{y})_1 + (\vec{x} \times \dot{\vec{y}})_1$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{x} \times \vec{y}) = \dot{\vec{x}} \times \vec{y} + \vec{x} \times \dot{\vec{y}}$$

質点、角運動量



位置の位置 $\vec{x} = \begin{pmatrix} r \cos \omega t \\ r \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{v} = \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -r\omega \sin \omega t \\ r\omega \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}$

(線形) 運動量 $\vec{p}(t) = m \vec{v}(t)$

$\vec{p}(t) = \begin{pmatrix} -mr\omega \sin \omega t \\ mr\omega \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}$

↑
物体が持っている
直線的な運動の向き

角運動量 $\vec{L}(t) = \vec{x}(t) \times \vec{p}(t)$

$\vec{L}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mr^2\omega \end{pmatrix}$

↑
回転の速さ
と
向き

回転の向きを逆にすると $\vec{L} \rightarrow -\vec{L}$

$$\vec{L}(t) = \vec{x}'(t) \times \vec{p}(t)$$

↑
 $\vec{x}(t)$ の始点、を回転軸と(た、

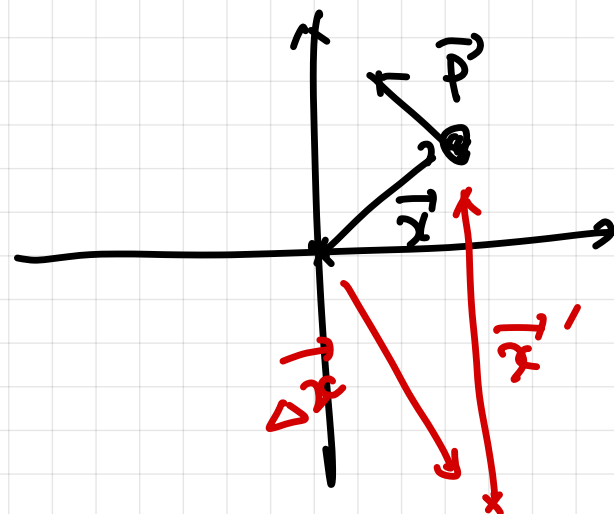
角運動量

↑
 原点から

原点から'の角運動量=い。

始点とずらした？

→



$$\vec{L}' = \vec{x}' \times \vec{p}$$

$$\vec{x} = \vec{x}' + \delta \vec{x}$$

$$\vec{x}' = \vec{x} - \delta \vec{x}$$

$$\vec{L}' = (\vec{x} - \delta \vec{x}) \times \vec{p}$$

$$= \vec{L} - \delta \vec{x} \times \vec{p}$$

~~~~~  
 始点とずらした=効果

## 回転、運動方程式

$$\begin{aligned}
 \text{運動方程式} \quad \vec{F} &= m \vec{a} \\
 &= m \dot{\vec{v}} \\
 &= \frac{d}{dt} (m \vec{v}) \\
 &= \frac{d}{dt} \vec{p}
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \vec{F} = \dot{\vec{p}}$$

運動量、時間変化 = 力

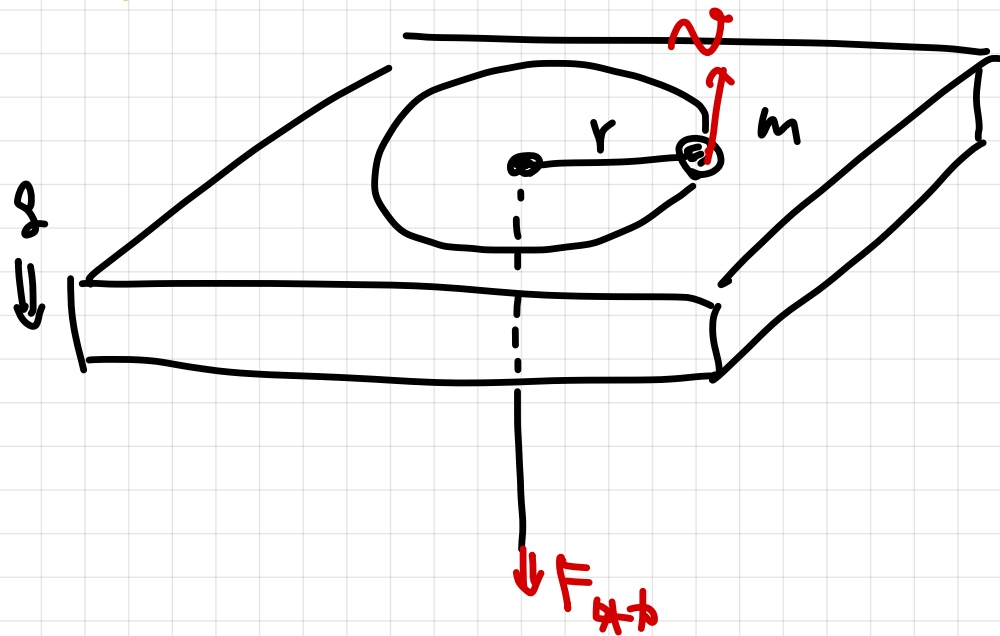
## 角運動量、時間変化

$$\begin{aligned}
 \dot{\vec{L}} &= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) \\
 &= \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} \\
 &= \underbrace{\vec{v} \times m \vec{v}}_{= 0} + \vec{r} \times \vec{F} \\
 &= \vec{r} \times \vec{F}
 \end{aligned}$$

$$\dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{F}$$



# < 演習 >

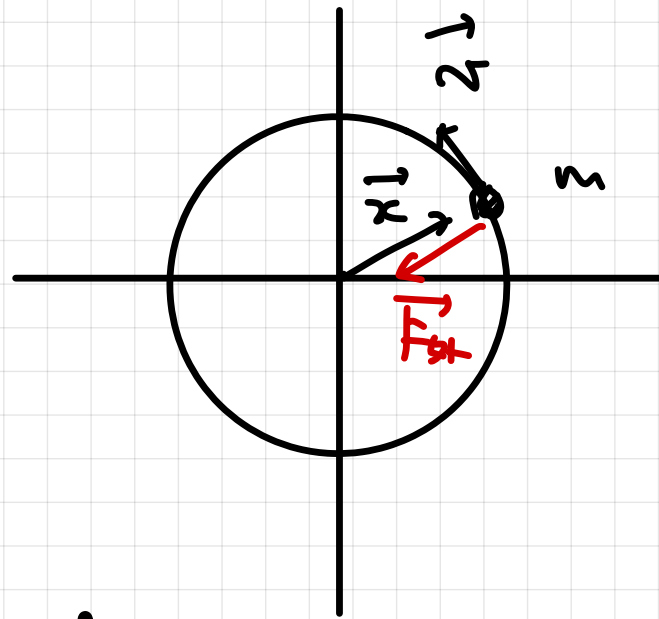


系を  $\psi, \phi, \theta$  により表す.  $r \rightarrow r'$  として.

$\psi \rightarrow \psi'$  として.

$\psi' \rightarrow ?$

$r \rightarrow r'$  として (1)  $r \rightarrow r'$  として?



$$\vec{r} = x_1 \hat{x}_1 + x_2 \hat{x}_2$$

(1)  $r \rightarrow r'$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m r^2 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{m} r v = \cancel{m} r' v'$$

$$\begin{array}{cc} \text{角动量} & \text{守恒} \\ \downarrow & \downarrow \\ \text{守恒量} & \text{守恒} \end{array}$$

$$v' = \frac{r}{r'} v$$

$$F_{\text{引力}}(r) = m \frac{v^2}{r}$$

$$= m \left( \frac{r}{r'} v' \right)^2 \frac{1}{r}$$

$$= \frac{m r v'^2}{r'^3}$$

$$\int_r^{r'} F_{\text{引力}}(r) dr$$

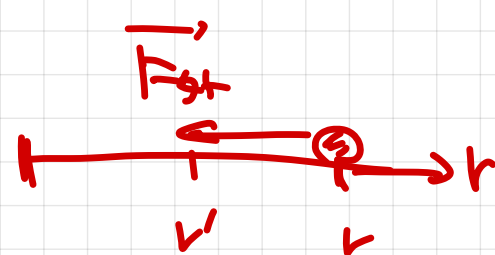
$$= -m r^2 v'^2 \int_r^{r'} r^{-3} dr$$

$$= m r^2 v'^2 \left[ +\frac{1}{2} r^{-2} \right]_r^{r'}$$

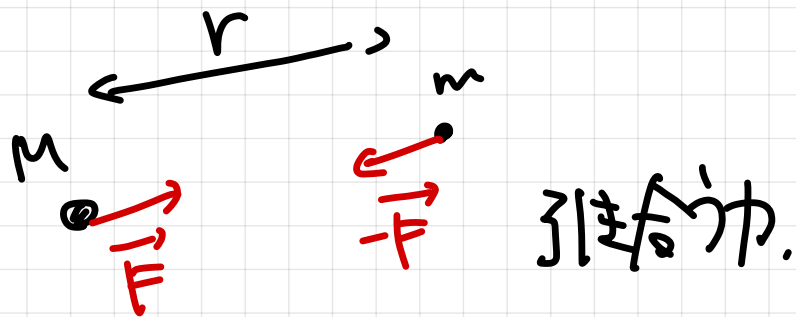
$$= m r^2 v'^2 \cdot \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{r'^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \right]$$

$$= \frac{m v'^2}{2} - \frac{m v^2}{2}$$

$$= \left( \frac{1}{2} m v'^2 - \frac{1}{2} m v^2 \right)$$



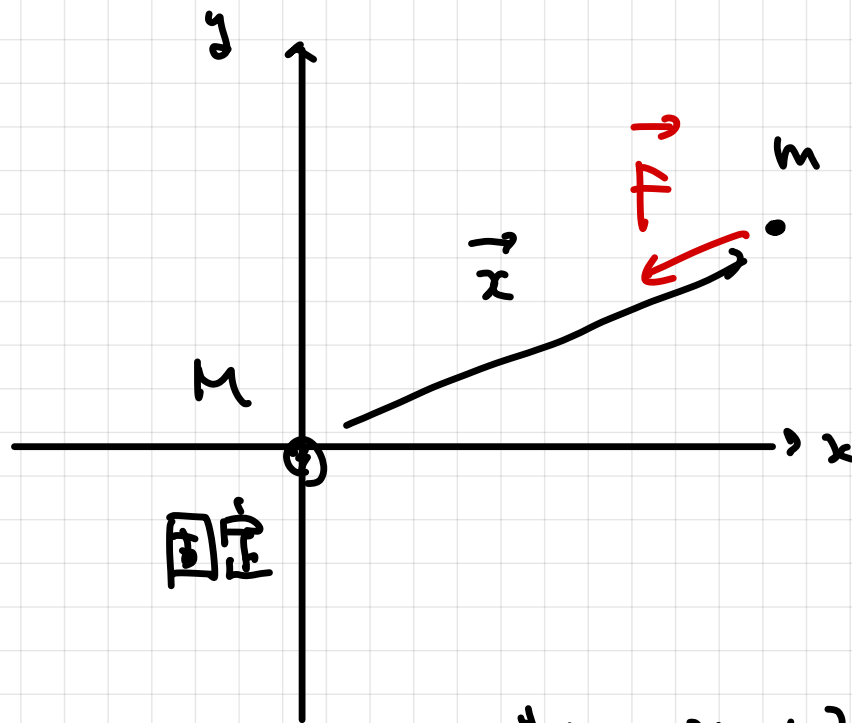
# 万有引力



$$|\vec{F}| = \frac{GMm}{r^2}$$

逆2乗則: 距離の2乗=反比例.

G: 万有引力定数.



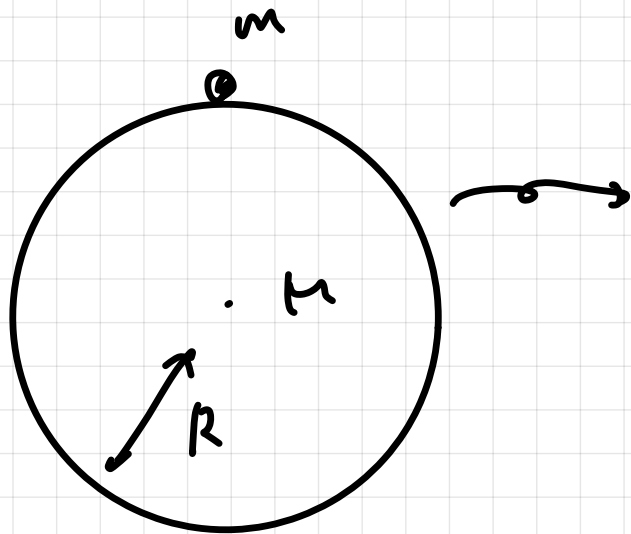
m 対 M の引力

$$\vec{F} = - \frac{GMm}{|\vec{x}|^2} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$$

= 大きさ 方向

地球が人を引く力

重力 = 万有引力



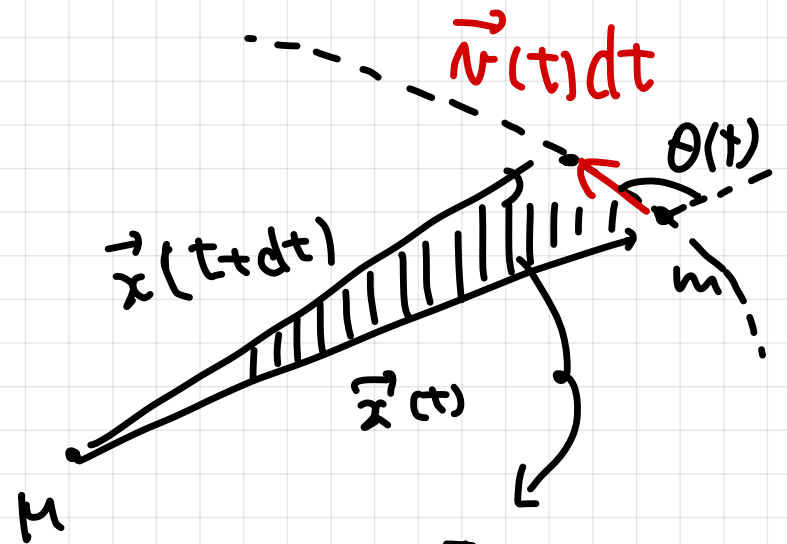
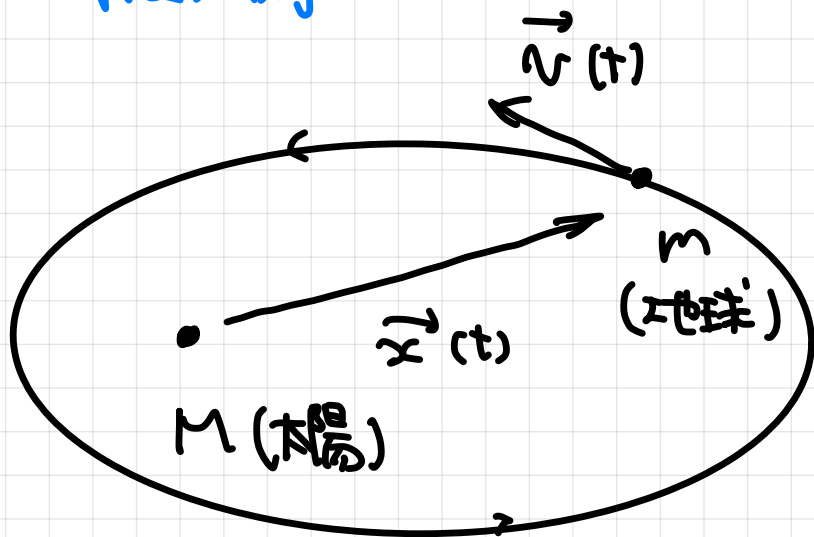
重力は  $\frac{GMm}{R^2}$  と考えていい。

(詳しくは後で)

$$\cancel{M}g = G \frac{M\cancel{m}}{R^2}$$

$$g = \frac{MG}{R^2}$$

# ケプラー-第2法則



ケプラー-第1 → 地球は太陽の周りを  
楕円軌道を描く。  
(近似)

ケプラー-第2 → 面積速度一定

ケプラー-第3 → 長半径  $a$ . 周期  $T$

$$\rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \text{一定 (近似)}$$

∴ 面積  $\propto dS \propto r^2 dt$

$$dS = \frac{1}{2} |\vec{r}(t)| |\vec{v}(t)| dt \cdot \sin(\pi - \theta(t))$$

$$\sin(\pi - \theta(t))$$

$$= \sin \pi \cos \theta(t) - \cos \pi \sin \theta(t)$$

$$= \sin \theta(t)$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{x}(t)| |\vec{v}(t)| \sin \theta(t)$$

$$= \frac{1}{2m} |\vec{x}(t) \times \vec{p}(t)|$$

$$= \frac{|\vec{L}(t)|}{2m}$$

m は  $\vec{x}(t)$  の

$$\vec{F}(t) = - \frac{GMm}{|\vec{x}(t)|^2} \frac{\vec{x}(t)}{|\vec{x}(t)|}$$

$$\vec{F}(t) \in \vec{x}(t) \text{ に平行}$$

$$\dot{\vec{L}}(t) = \vec{x}(t) \times \vec{F}(t) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{L}(t) : \text{一定}$$

$$\vec{L}(t) = \vec{L} \quad (t \text{ に依存しない})$$

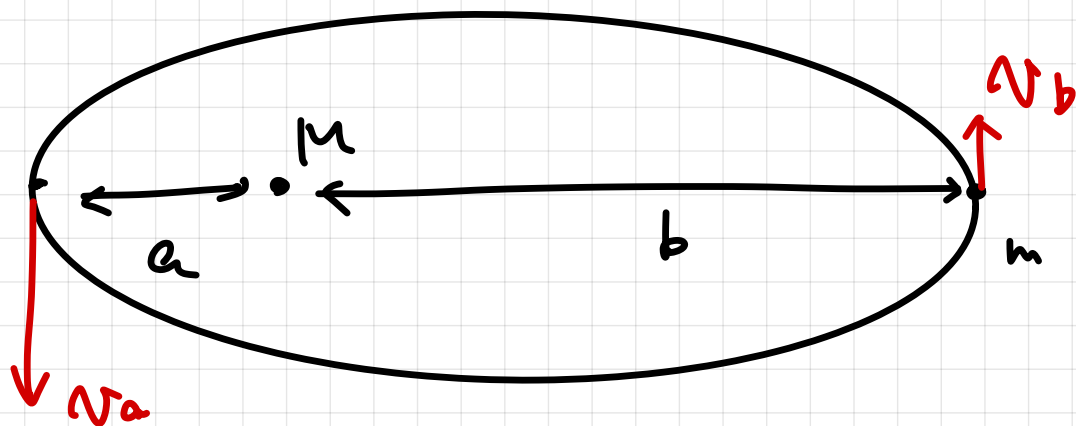
$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} : \text{一定}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{|\vec{L}|}{2m}$$

面積速度一定

↑  
角運動量保存則  $a = r_0$

< 演習 >



$v_b$  是  $v_a$  的何倍?

$$\frac{1}{2\pi} \times 2\pi a v_a = \frac{1}{2\pi} \times 2\pi b v_b$$

$$v_b = \frac{a}{b} v_a$$

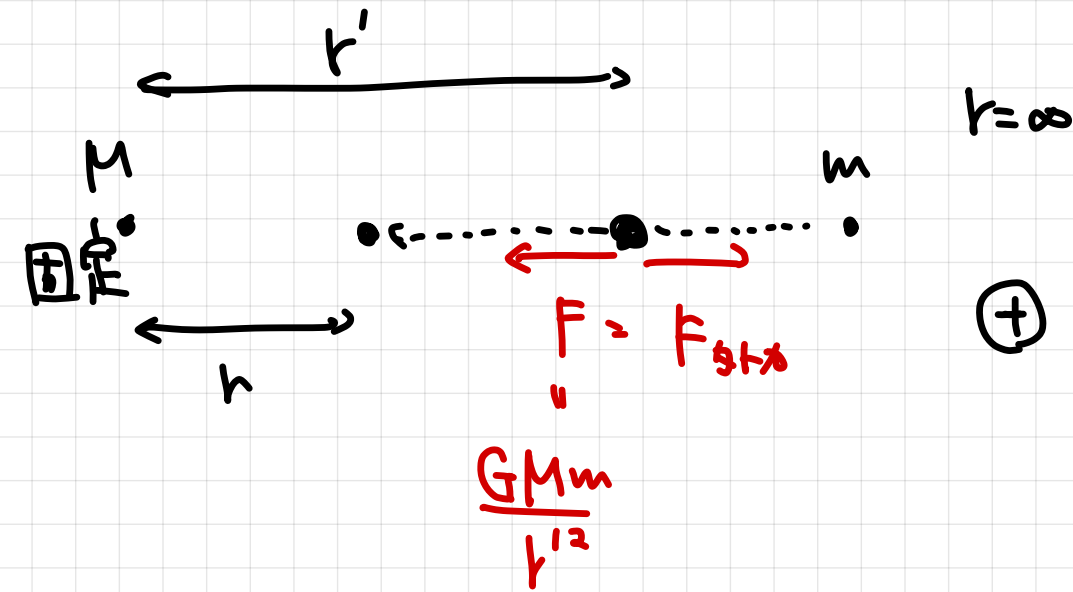
# < 目標 9 >

「7<sup>0</sup>7 - 第1 & 3 法則」

\* 計算 1<sup>1</sup>の長め

\* ニニ<sup>1</sup>で惑星の運動に理解できる

万有引力の位置エネルギー



外力を加えなければ無限遠から  
r の位置まで「中、く」動かす。

位置エネルギーの  
基準位置

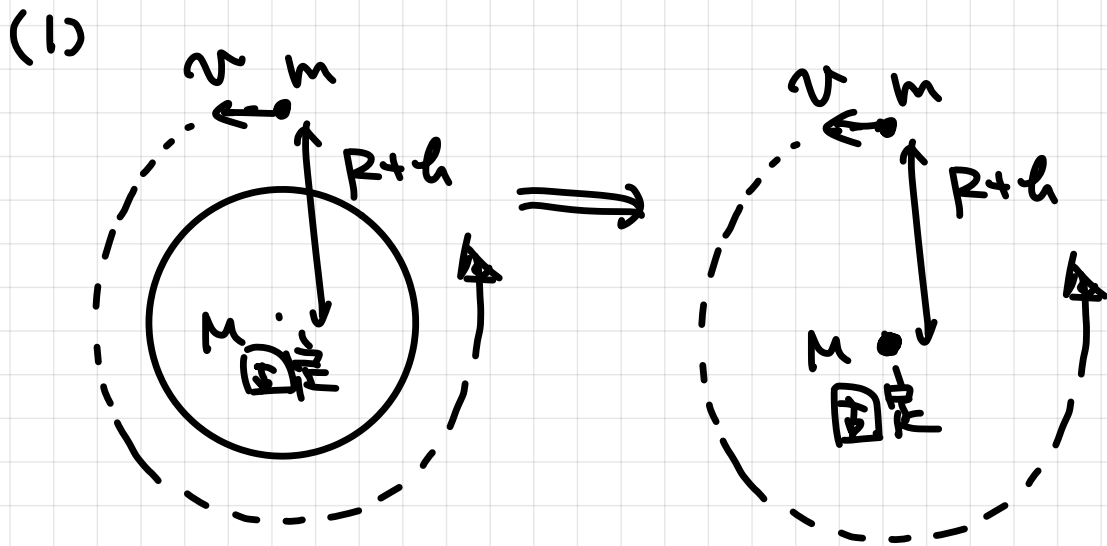
$$W_{\text{外力}} = \int_{\infty}^r \frac{GMm}{r'^2} dr'$$

$$= GMm \left[ -\frac{1}{r'} \right]_{\infty}^r$$

$$= -\frac{GMm}{r}$$

万有引力の基準を無限遠にとる。  
位置エネルギーは負になる。

# < 演習 >



衛星の速度は?

$$\cancel{m} \frac{v^2}{R+h} = \frac{GM \cancel{m}}{(R+h)^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

$h=0$  第一宇宙速度.

$$v_1 = \sqrt{\frac{MG}{R}}$$

$$MG = gR^2 \quad \therefore$$

$$v_1 = \sqrt{gR}$$

(2)



$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{r}$$

$$\frac{v^2}{2MG} - \frac{1}{R} = -\frac{1}{r}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} &= \frac{1}{R} - \frac{v^2}{2MG} \\ &= \frac{2MG - v^2 R}{2MGR}\end{aligned}$$

$$r = \frac{2MGR}{2MG - v^2 R}$$

無限遠まで  $r \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} &= \frac{1}{2}mv_\infty^2 - \frac{GMm}{\infty} \\ &= \frac{1}{2}mv_\infty^2\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 \geq \frac{GMm}{R} \geq 0$$

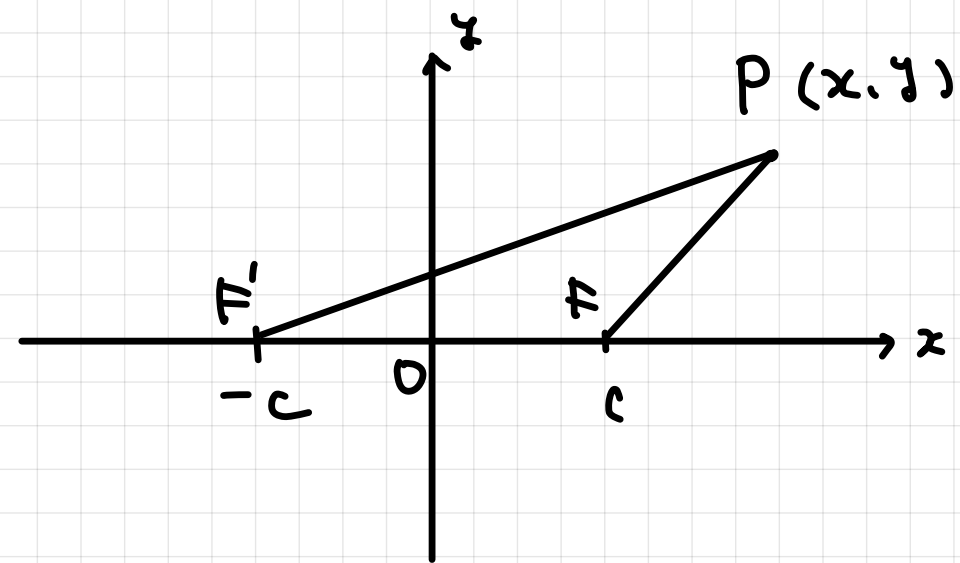
$$v^2 \geq \frac{2MG}{R}$$

$$v \geq \sqrt{\frac{2MG}{R}} = v_2$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2MG}{R}} = \sqrt{2gR}$$

第2宇宙速度

# 1. 基本

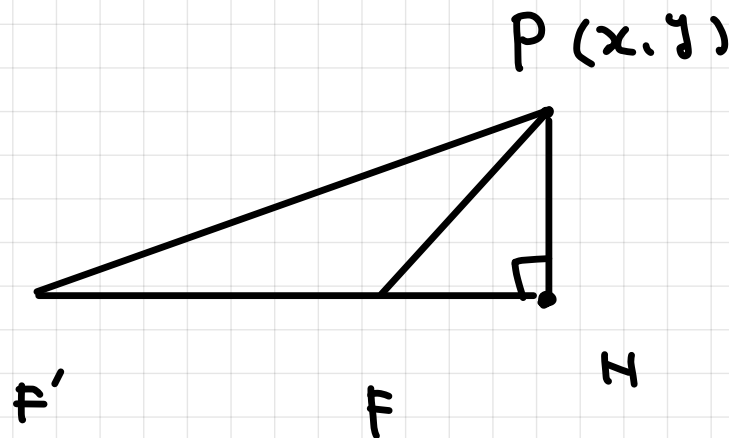


$$c > 0, \quad a > c \quad z''$$

$$FP + F'P = 2a \quad z \neq \text{定数}$$

$P$  は  $z$  の軌跡  $\Gamma$  上の点  $\Gamma = \{P\}$

$F, F'$  は焦点



$$FP = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$F'P = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$FP + F'P = 2a$$

$$FP = 2a - F'P$$

$$FP^2 = 4a^2 - 4aF'P + F'P^2$$

$$\cancel{a} F'P = 4a^2 + F'P^2 - FP^2$$

$$= 4c^2 + (x+c)^2 + y^2 - (x-c)^2 - y^2$$

$$= \cancel{4}a^2 + \cancel{4}cx$$

$$a^2 F'P^2 = (a^2 + cx)^2$$

$$a^2 (x+c)^2 + a^2 y^2 = a^4 + 2a^2 cx + c^2 x^2$$

$$a^2 x^4 + \cancel{2a^2 cx} + a^2 c^2 + a^2 y^2 = a^4 + \cancel{2a^2 cx} + c^2 x^2$$

$$(a^2 - c^2) x^2 + a^2 y^2 = a^2 (a^2 - c^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

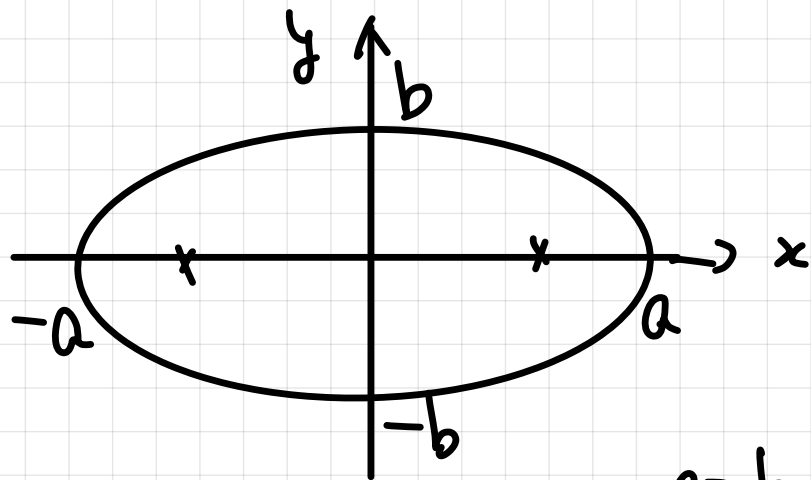
$$a^2 - c^2 = b^2$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \quad \text{et } a' < c.$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$


---

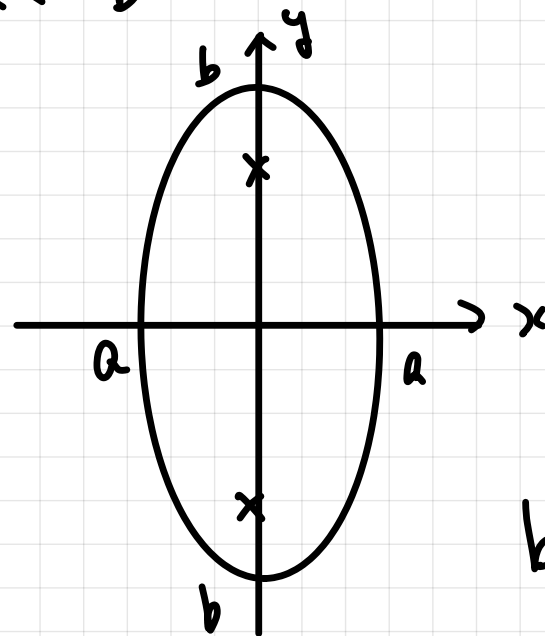
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{是长轴在x轴上的椭圆.}$$



$a > b$

焦点  $(\pm \sqrt{a^2 - b^2}, 0)$

$$\begin{aligned} x &\leftrightarrow y \\ a &\leftrightarrow b \end{aligned} \quad \text{是长轴在y轴上的椭圆.}$$



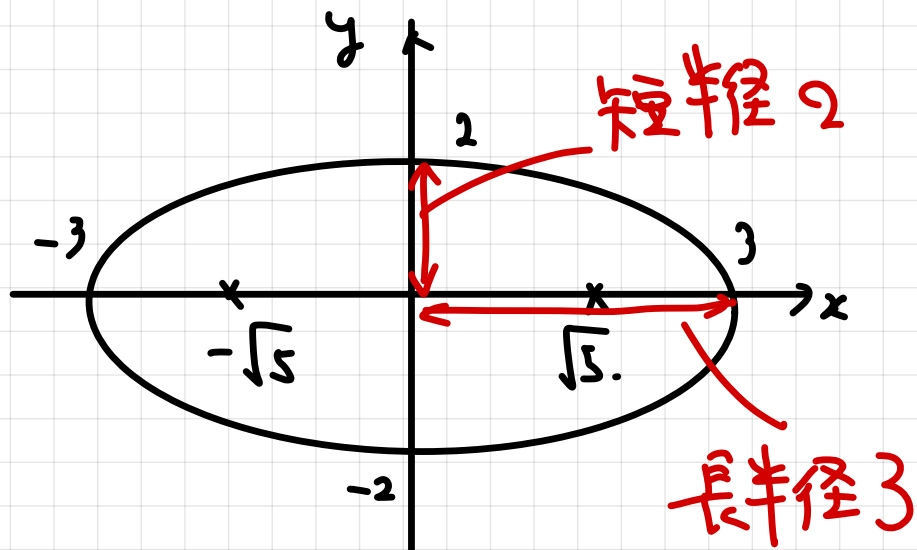
$b > a$

焦点  $(0, \pm \sqrt{b^2 - a^2})$

# <演習>

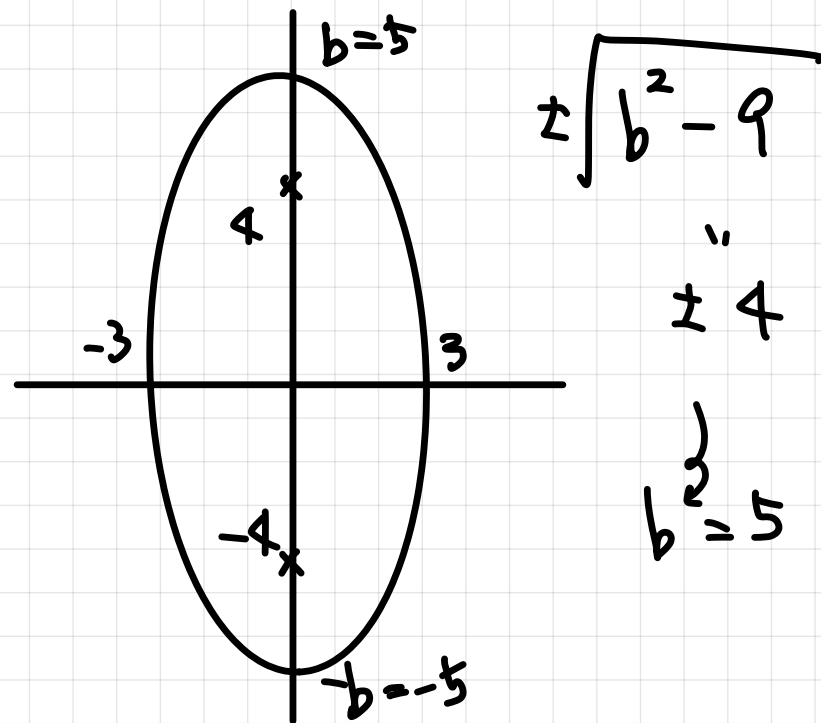
$$(1) \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

$$3 > 2 \quad \therefore \text{長半軸}, (\pm \sqrt{9-4}, 0) \\ = (\pm \sqrt{5}, 0)$$

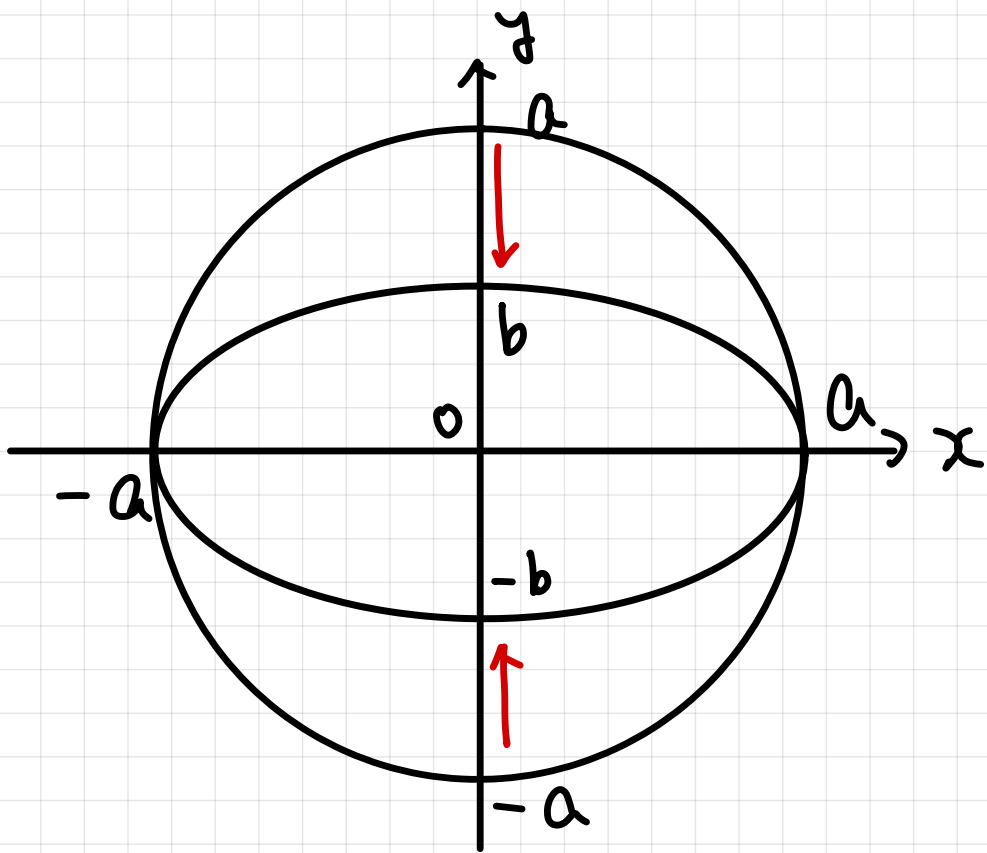


$$(2) \text{焦点 } (0, \pm 4)$$

$$\text{短半径 } 3 \\ \underline{\underline{a=3}} \quad \text{長半径 } b=5$$



$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$



$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\begin{cases} x = a \cos \omega t \\ y = a \sin \omega t \end{cases}$$

Focus (0,0)

$$y \frac{1}{a} \cos \omega t = \frac{b}{a} \sin \omega t$$

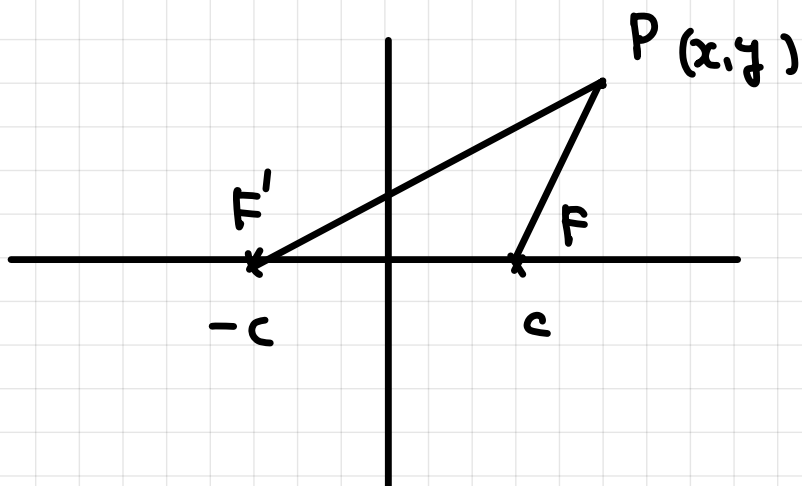
$$\begin{cases} x = a \cos \omega t \\ y = b \sin \omega t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x}{a} = \cos \omega t \\ \frac{y}{b} = \sin \omega t \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{Vertices } (\pm \sqrt{a^2 - b^2}, 0)$$

# 双曲线的基本



$$a > 0, \quad c > a.$$

$$|PF - PF'| = 2a$$



$$PF = PF' \text{ の差}$$

絶対値を用いて表現

$$1 - 3 \text{ の差は } 2$$

「絶対値の意義」を正に与える。

$$1 - 3 = -2 \quad 2, -2 < c$$

$$3 - 1 = 2 \quad 2 < c.$$

大きい方から小さい方へ、差を取ります。

$$|1 - 3| = 2 \quad \text{絶対値を用いる。}$$



絶対値符号は絶対値を意味する。

$$|x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

$$|x|^2 = x^2$$

$$PF = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$PF' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$|PF - PF'| = 2a$$

$$\pm(PF - PF')$$

$$PF - PF' = \pm 2a$$

$$PF = PF' \pm 2a$$

$$PF^2 = PF'^2 \pm 4a \cdot PF' + 4a^2$$

$$PF^2 - PF'^2 - 4a^2 = \pm 4a \cdot PF'$$

$$-4cx - 4a^2 = \pm 4a PF'$$

$$(a^2 + cx)^2 = a^2 PF'^2$$

$$= a^2 (x+c)^2 + a^2 y^2$$

$$a^4 + 2acx + c^2 x^2 = a^2 x^2 + 2a^2 cx + a^2 c^2 + a^2 y^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2 y^2 = a^2 (a^2 - c^2)$$

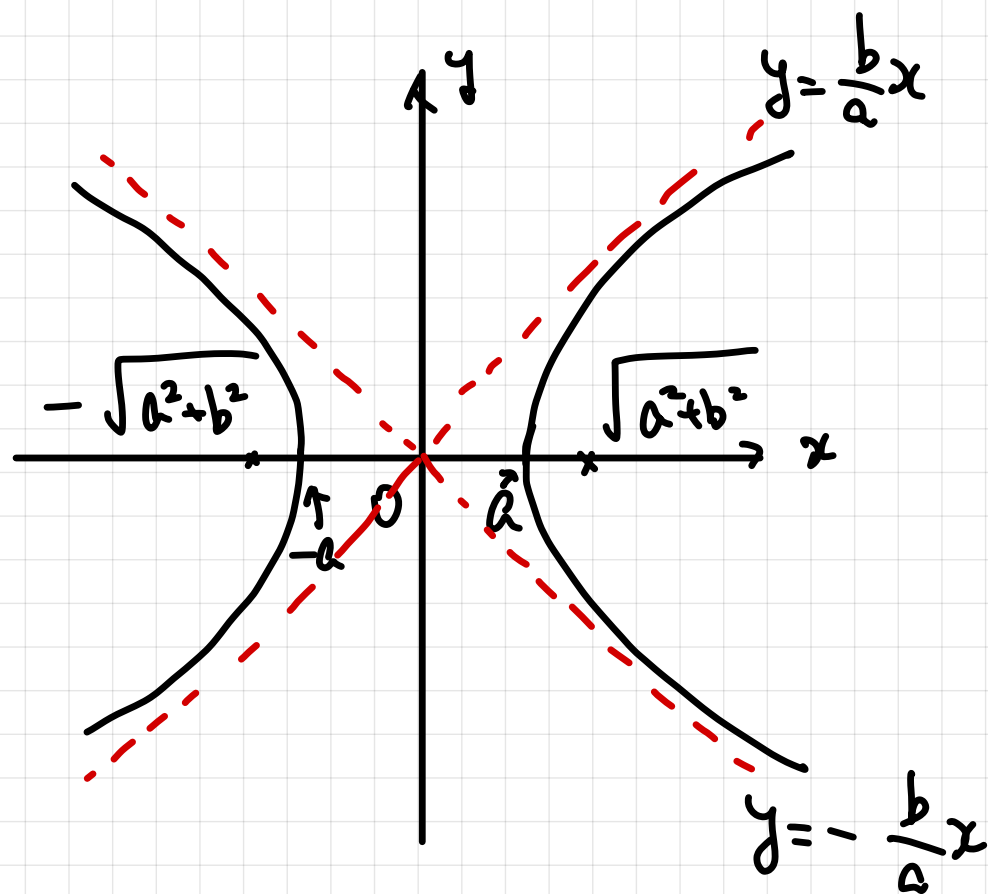
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

$$a^2 - c^2 < 0 \text{ for } a < c$$

$$a^2 - c^2 = -b^2 \text{ for } a < c.$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

焦点  $(\pm \sqrt{a^2 + b^2}, 0)$



漸近線

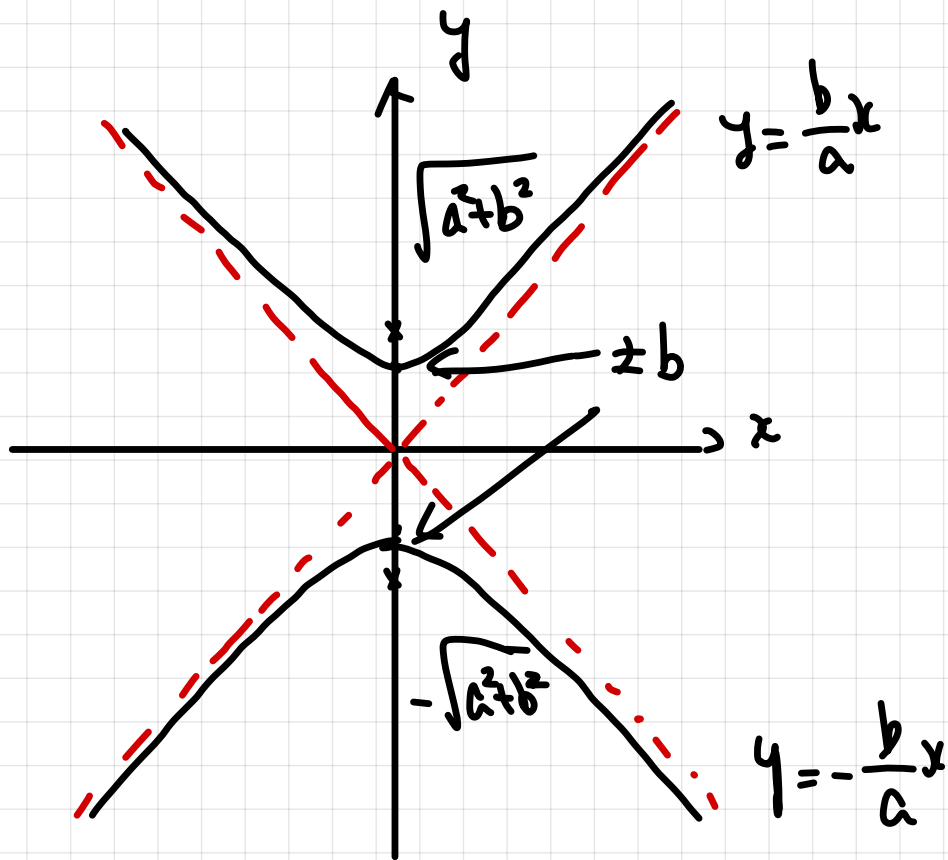
$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$$

$$\frac{y}{b} = \pm \frac{x}{a}$$

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

焦點  $(0, \pm \sqrt{a^2 + b^2})$



<演習>

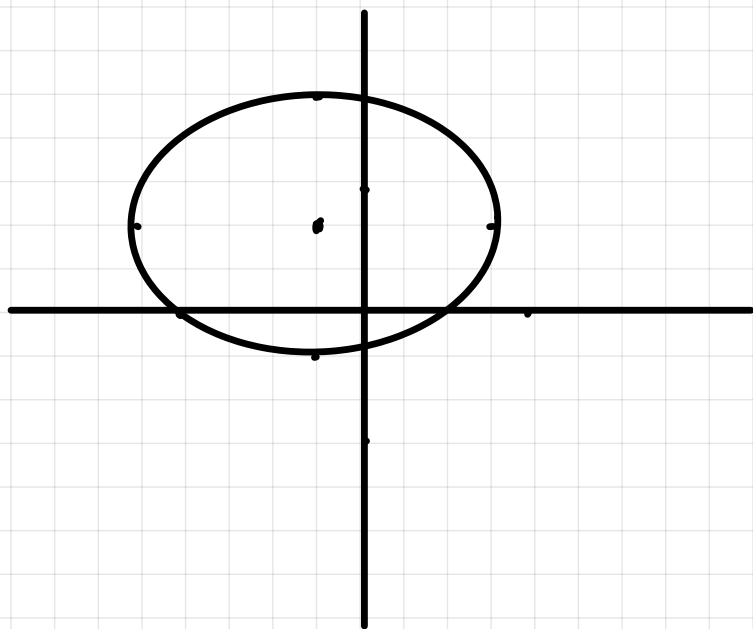
1.  $\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

2.  $-\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

3.  $y = \frac{6}{x-2} + 1$

$$1. \frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \begin{matrix} \nearrow x: -1 \\ y: +2 \end{matrix}$$



$$2. -\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

$$-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \begin{matrix} \nearrow \begin{cases} x: -1 \\ y: +2 \end{cases} \end{matrix}$$

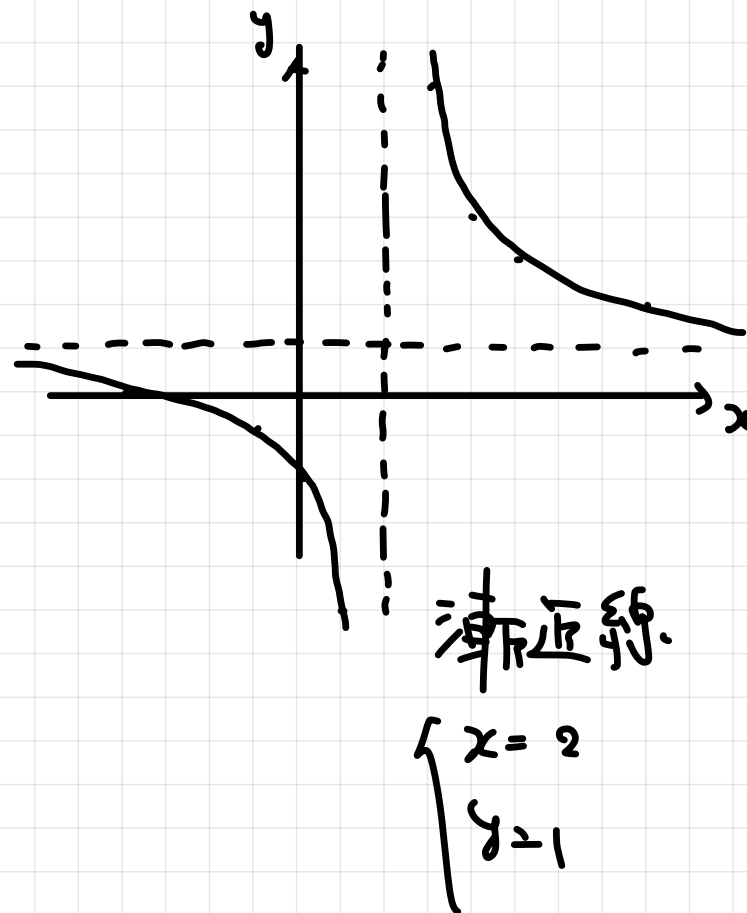
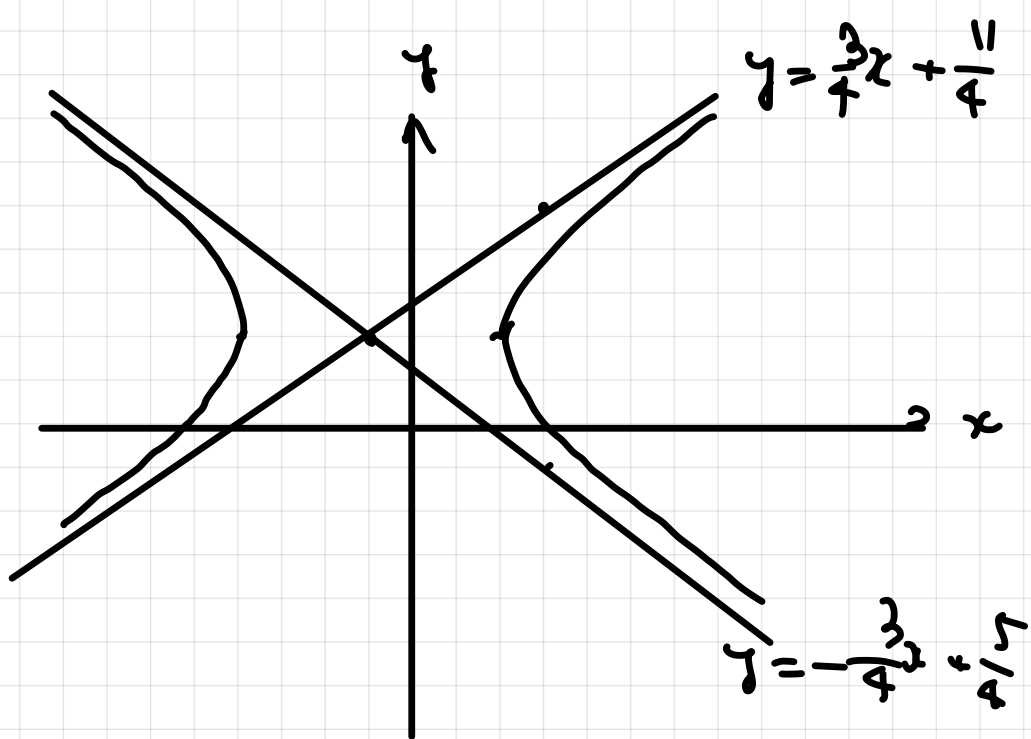
漸近線

$$\frac{x+1}{4} \pm \frac{y-2}{3} = 0$$

$$\frac{y-2}{3} = \pm \frac{x}{4} \pm \frac{1}{4}$$

$$y-2 = \pm \frac{3}{4}x \pm \frac{3}{4}$$

$$y = \pm \frac{3}{4}x \pm \frac{3}{4} + 2$$



3. 
$$y = \frac{6}{x-2} + 1$$

$$y-1 = \frac{6}{x-2}$$

$$y = \frac{6}{x} \quad \begin{array}{l} \uparrow x: +2 \\ y: +1 \end{array}$$

# 離心率 = 2次曲線

2次曲線

$$Ax^2 + bx + Cy^2 + dy + e = 0$$

これを2平に完成

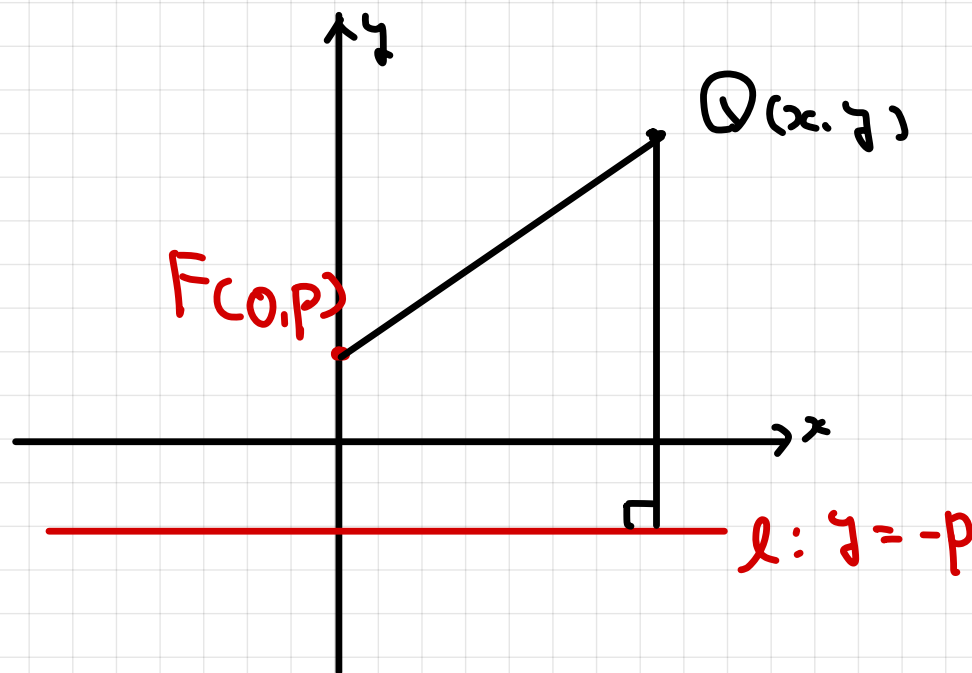


「円」、 「双曲線」、 「放物線」

~~~~~  
これを統一目的に分類するにあたり

「離心率」 という概念を

導入.



$$FQ : Q \text{ 至 } l \text{ の距離} = e : 1$$

↑ ↑ ↑
焦点 準線 離心率

$$e > 0$$

$$FQ = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}$$

$$Q(1, 1, 1, 1) = y + p$$

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} : y + p = e : 1$$

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = e(y+p)$$

$$x^2 + (y-p)^2 = e^2(y+p)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = e^2 y^2 + 2e^2 py + e^2 p^2$$

$$x^2 + (1-e^2)y^2 - 2p(1+e^2)y = (e^2-1)p^2$$

$$1-e^2 = 0 \quad \xrightarrow{(e=1)} \quad e=1 \quad \text{anz.}$$

$$x^2 - 2p(1+1)y = 0$$

$$y = \frac{1}{4p} x^2$$

放物線

$$e \neq 1 \quad \text{anz.}$$

$$x^2 + (1-e^2) \left\{ y^2 - \frac{2p(1+e^2)}{1-e^2} y \right\}$$

$$= (e^2-1)p^2$$

$$x^2 + (1-e^2) \left\{ \left(y - \frac{p(1+e^2)}{1-e^2} \right)^2 - \frac{p^2(1+e^2)^2}{(1-e^2)^2} \right\} = (e^2-1)p^2$$

$$x^2 + (1-e^2) \left(y - \frac{p(1+e^2)}{1-e^2} \right)^2 - \frac{p^2(1+e^2)^2}{1-e^2} = (e^2-1)p^2$$

$$\frac{x^2}{1-e^2} + \left\{ y - \frac{p(1+e^2)}{1-e^2} \right\}^2 = \frac{p^2(1+e^2)^2}{(1-e^2)^2} - p^2$$

$$= \frac{p^2 \cdot 4e^2}{(1-e^2)^2} = \left(\frac{2ep}{1-e^2} \right)^2$$

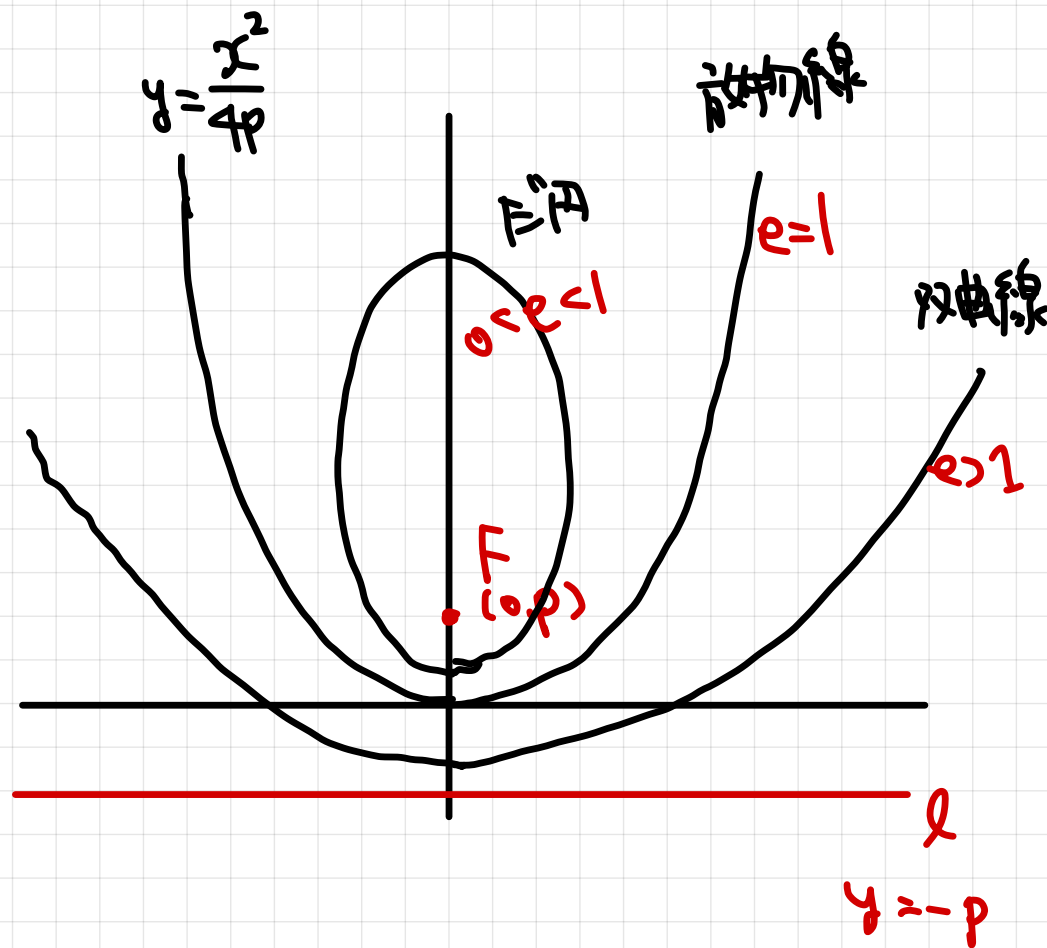
$$(1-e^2) \frac{x^2}{(2ep)^2} + \frac{\left\{ y - \frac{p(1+e^2)}{1-e^2} \right\}^2}{\left(\frac{2ep}{1-e^2} \right)^2} = 1$$

$$1 - e^2 > 0 \Rightarrow 1 > e \text{ 且 } e \neq 0$$

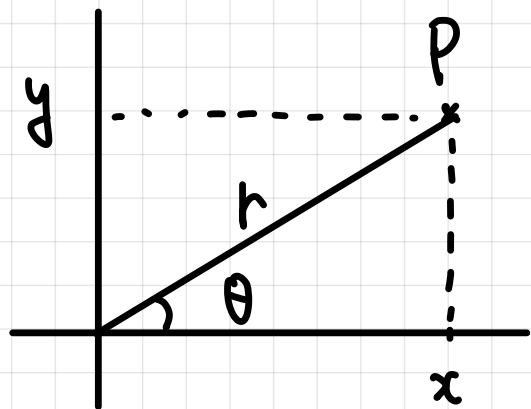
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y - \dots)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \text{椭圆}$$

$$1 - e^2 < 0 \Rightarrow 1 < e \text{ 且 } e \neq 0$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y - \dots)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \text{双曲线}$$



極座標表示



P の位置 直交座標表示 (x, y)

極座標表示 (r, θ)

距離 r = 半径 r
 傾き θ = 時計回りの角度 θ

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

< 演習 >

1. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ -100\sqrt{3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}$

$$1. \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$$

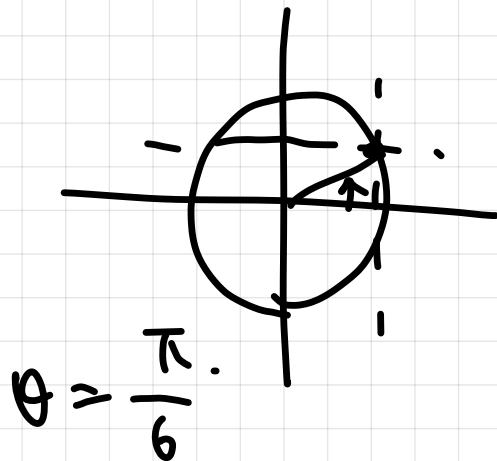
$$(\sqrt{3})^2 + 1^2 = r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

$$4 = r^2$$

$$(r > 0) \downarrow \\ r = 2$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \pi/6 \end{pmatrix}$$



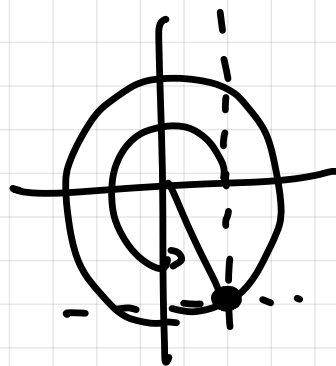
$$2. \begin{pmatrix} 100 \\ -100\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$100^2 + 100^2 \cdot 3 = r^2$$

$$r = 200$$

$$\cos \theta = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{-100\sqrt{3}}{200} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

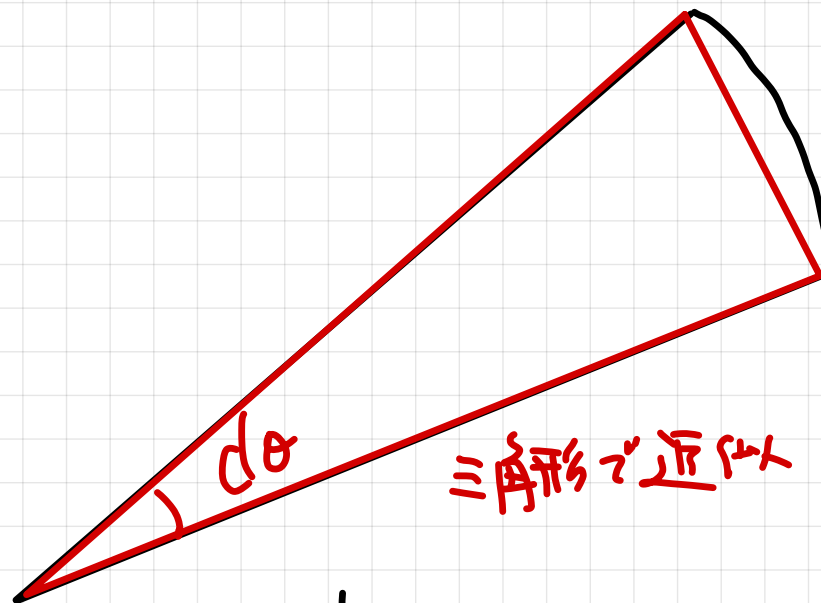
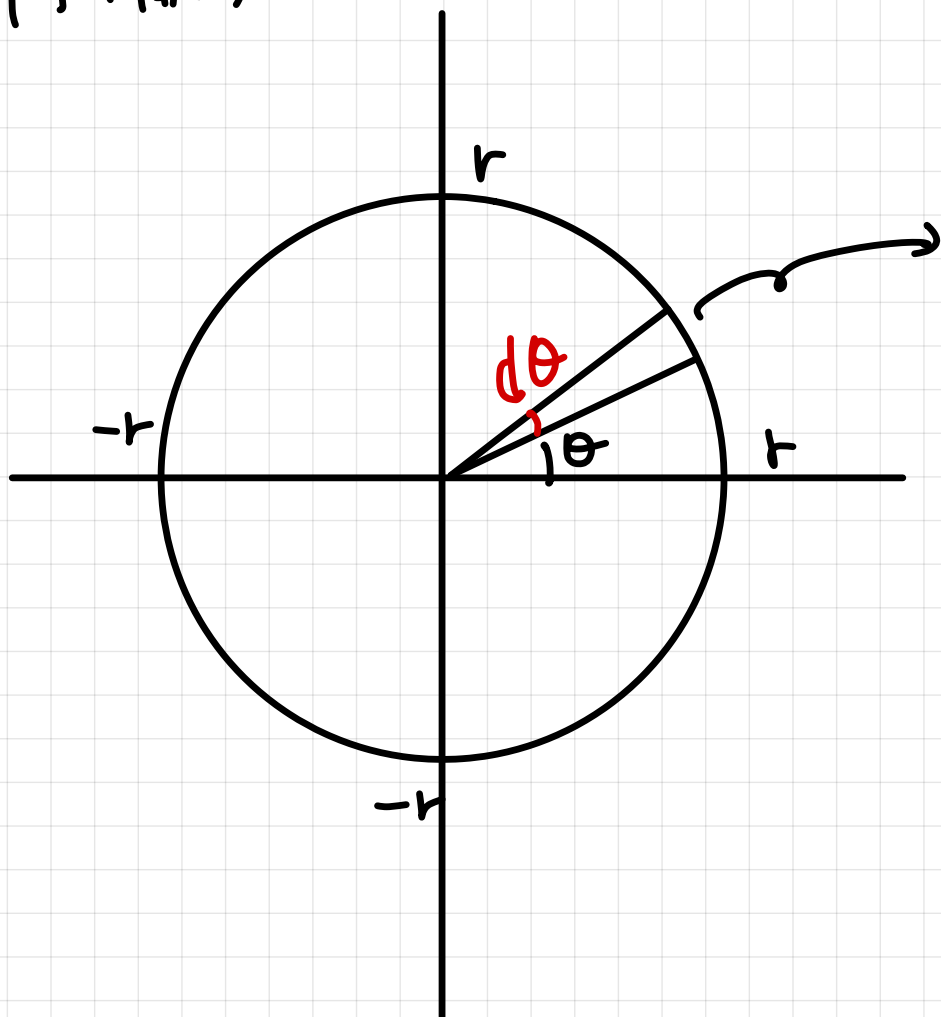


$$\theta = \frac{5\pi}{3}$$

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ \frac{5\pi}{3} \end{pmatrix}$$

< 演習 >

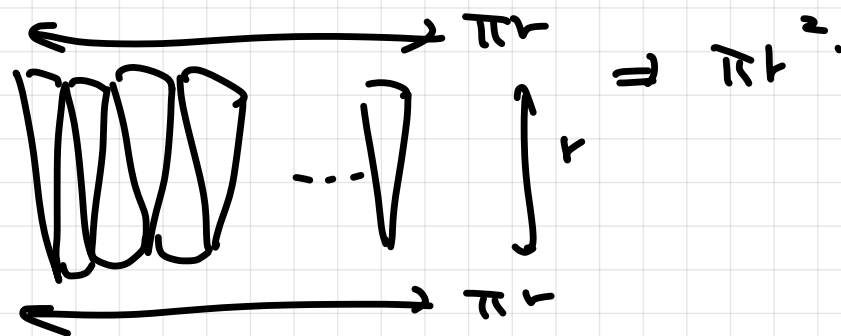
円の面積



$$dS = \frac{1}{2} r \times r \times \sin d\theta$$

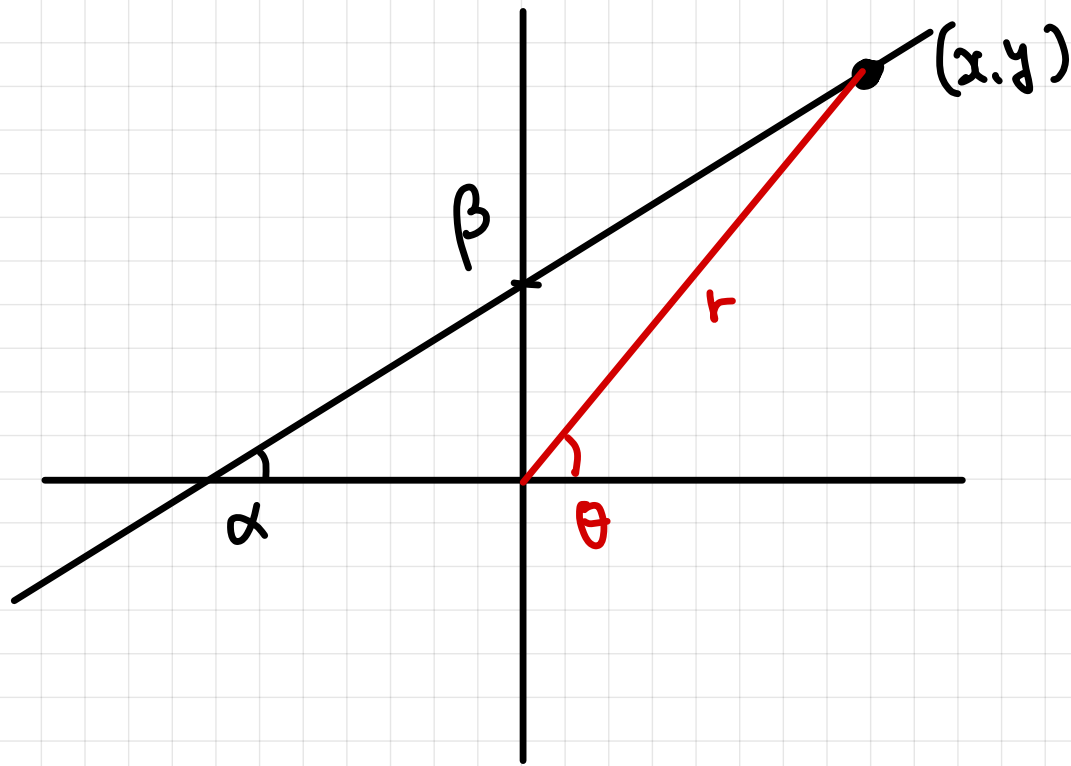
$\downarrow d\theta \rightarrow 0$
 $d\theta$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \pi r^2$$



極座標表示圖形的方程式

1. $y = (\tan \alpha) x + \beta$



$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

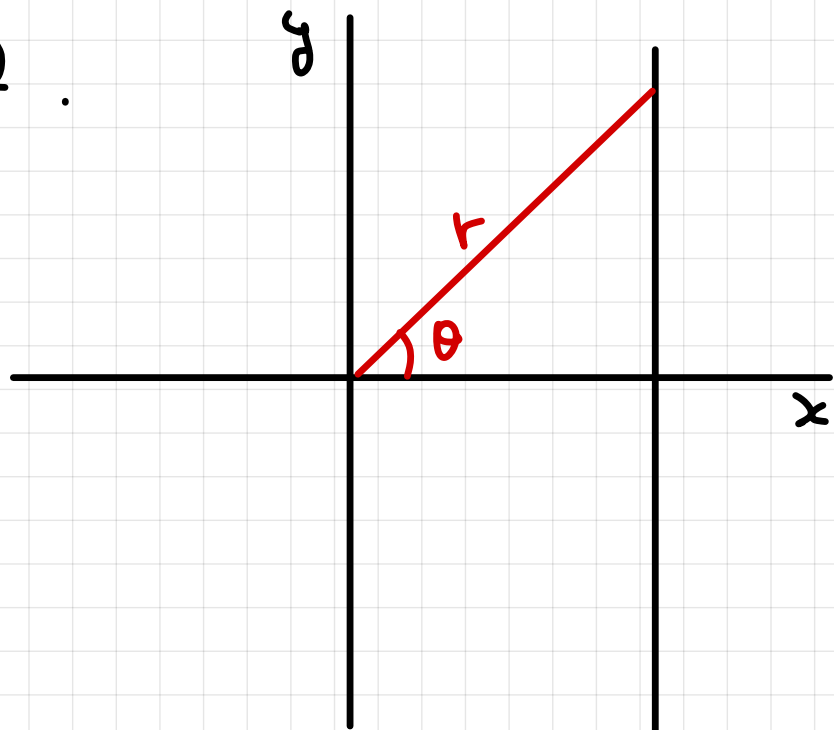
$$r \sin \theta = (\tan \alpha) r \cos \theta + \beta$$

$$r \sin \theta \cos \alpha = r \cos \theta \sin \alpha + \beta \cos \alpha$$

$$r (\sin \theta \cos \alpha - \cos \theta \sin \alpha) = \beta \cos \alpha$$

$$\underline{\underline{r \sin (\theta - \alpha) = \beta \cos \alpha}}$$

2.



$$x = a$$

$$r \cos \theta = a$$

< 演習 >

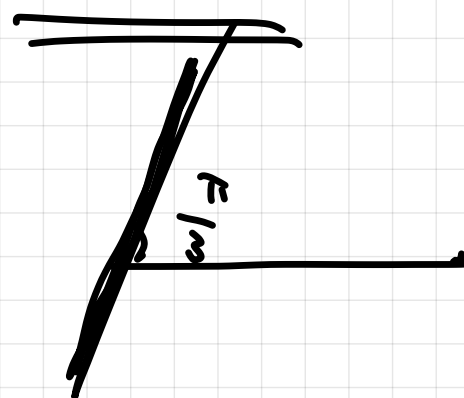
$$y = \sqrt{3}x \approx r, \theta = ?$$

⇓

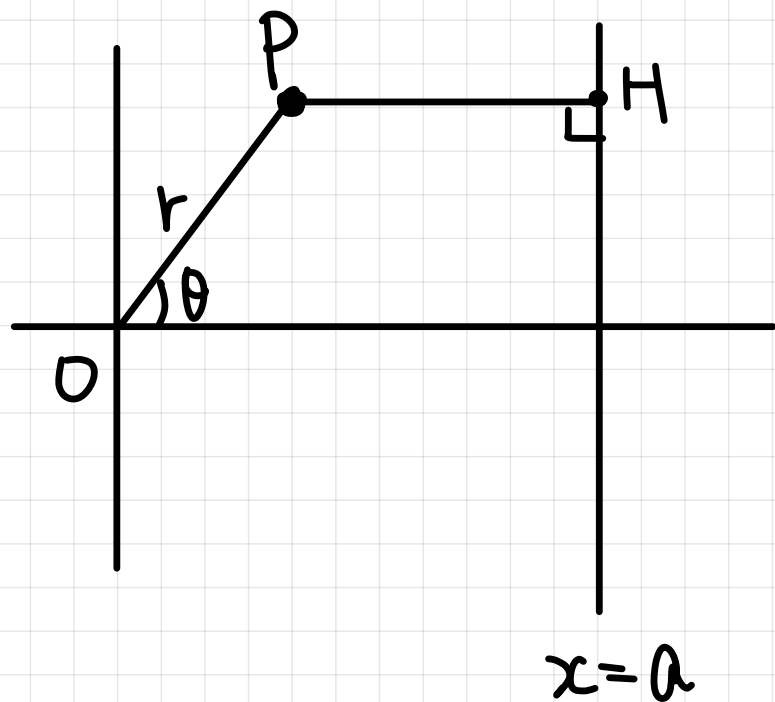
$$r \sin \theta = \sqrt{3} r \cos \theta$$

$$\tan \theta = \sqrt{3}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi, \dots$$



3. 二次曲線



$$OP: PH = e : 1.$$

$$PH = a - r \cos \theta$$

$$r : a - r \cos \theta = e : 1$$

$$ea - r e \cos \theta = r$$

$$r(1 + e \cos \theta) = ea$$

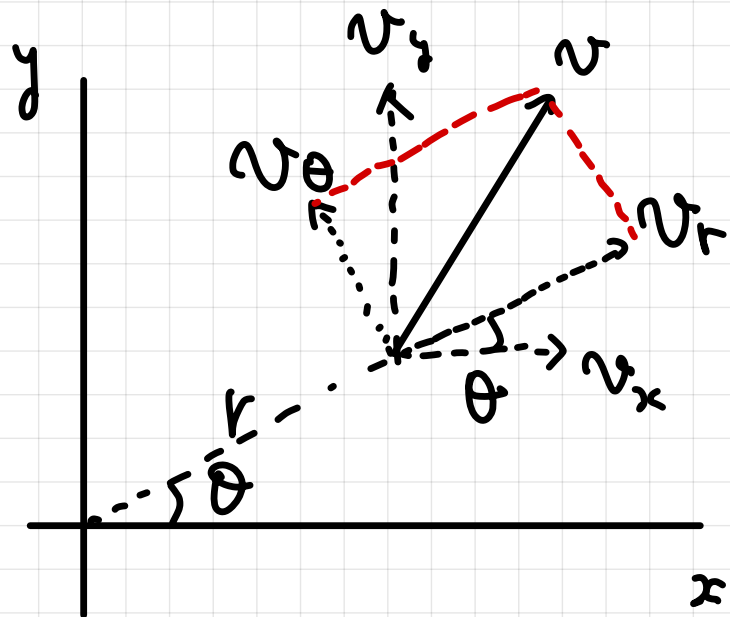
$$r = \frac{ea}{1 + e \cos \theta}$$

$$0 < e < 1 : \text{橢圓}$$

$$e = 1 : \text{拋物線}$$

$$e > 1 : \text{雙曲線}$$

極座標表示での運動方程式



v を r 方向と θ 方向に分解

この v_r と v_θ は

v_x と v_y に r, θ を使って表すことができる。

$$v_r = v_x \cos \theta + v_y \sin \theta$$

同様に v_θ は

$$v_\theta = -v_x \sin \theta + v_y \cos \theta$$

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta}$$

これより v_r と v_θ は $\sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2}$ と表すことができる。

$$v_x = \frac{d}{dt} (r \cos \theta)$$

$$= \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta$$

$$v_y = \frac{d}{dt} (r \sin \theta)$$

$$= \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta$$

$$v_r = v_x \cos \theta + v_y \sin \theta$$

$$= (\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta) \cos \theta + (\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta) \sin \theta$$

$$= \dot{r} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

$$= \dot{r}$$

$$v_\theta = -(\dot{r} \sin \theta - r \dot{\theta} \cos \theta) + (\dot{r} \cos \theta + r \dot{\theta} \sin \theta)$$

$$= r \dot{\theta}$$

$$\therefore \underline{\underline{v_r = \dot{r} \quad , \quad v_\theta = r \dot{\theta}}}$$

加速度も図に示すように。

$$\begin{cases} a_r = a_x \cos \theta + a_y \sin \theta \\ a_\theta = -a_x \sin \theta + a_y \cos \theta \end{cases}$$

$$Q_x = \frac{d}{dt} v_x$$

$$= \frac{d}{dt} (\dot{r}c - r\dot{\theta}s)$$

$$= \ddot{r}c - \dot{r}\dot{\theta}s - \dot{r}\dot{\theta}s - r\ddot{\theta}s - r\dot{\theta}^2c$$

$$= \ddot{r}c - 2\dot{r}\dot{\theta}s - r\ddot{\theta}s - r\dot{\theta}^2c$$

$$Q_y = \frac{d}{dt} (\dot{r}s + r\dot{\theta}c)$$

$$= \ddot{r}s + \dot{r}\dot{\theta}c + \dot{r}\dot{\theta}c + r\ddot{\theta}c - r\dot{\theta}^2s$$

$$= \ddot{r}s + 2\dot{r}\dot{\theta}c + r\ddot{\theta}c - r\dot{\theta}^2s$$

$$Q_r = (\ddot{r}c - 2\dot{r}\dot{\theta}s - r\ddot{\theta}s - r\dot{\theta}^2c)c$$

$$+ (\ddot{r}s + 2\dot{r}\dot{\theta}c + r\ddot{\theta}c - r\dot{\theta}^2s)s$$

$$= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$Q_\theta = -(\ddot{r}c - 2\dot{r}\dot{\theta}s - r\ddot{\theta}s - r\dot{\theta}^2c)s$$

$$+ (\ddot{r}s + 2\dot{r}\dot{\theta}c + r\ddot{\theta}c - r\dot{\theta}^2s)c$$

$$= 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$$

$$= \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta})$$

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \end{pmatrix}$$

<演習>

等速円運動

$$\Rightarrow a_\theta = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

$$r^2\dot{\theta} = \text{定数}$$

$$\text{定数} \cdot \dot{\theta} = \omega \text{ とおく.}$$

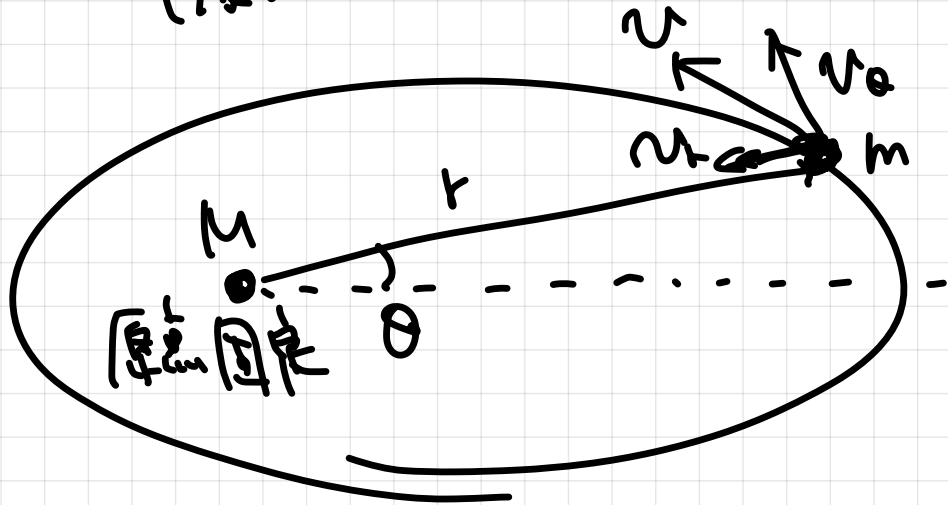
$$a_r = -r\omega^2.$$

$$f_\theta = 0$$

$$f_r = ma_r = -\underbrace{mr\omega^2}_{\text{向心力の形}}$$

77°- 第2法則)

第1から、 t ="円軌道"
(後述)



$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \frac{1}{2} \cdot r \cdot v_\theta \\ &= \frac{1}{2} \cdot r^2 \dot{\theta} \end{aligned}$$

$$f_\theta = 0 = m a_\theta$$

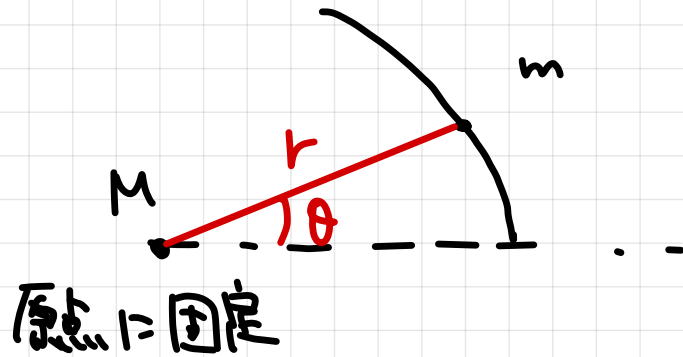
$$= m \cdot \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta})$$

$$\Rightarrow r^2 \dot{\theta} = \text{定数}$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{dt} = \text{定数.}$$

7707-第1法則

* 軌道と長さ



$$\begin{cases} m a_r = \cancel{m} (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) = - \frac{GM \cancel{m}}{r^2} & ① \\ m a_\theta = m \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = 0 & ② \end{cases}$$

$$② \Rightarrow r^2 \dot{\theta} = 2L \text{ 一定 } (L: \text{定数})$$

$$u = \frac{1}{r} \text{ 一定 } (u \text{ と } \theta \text{ の関係は } r \text{ と } \theta \text{ の関係の逆関数として見れば})$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{2L}{r^2} = 2L u^2$$

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{dr}{dt} \cdot \frac{1}{\dot{\theta}} \\ &= - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{\dot{\theta}} \\ &= - \frac{2L}{\dot{\theta}} \frac{du}{d\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= -2L \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{d\theta} \right) \\ &= -2L \frac{d^2 u}{d\theta^2} \cdot \frac{d\theta}{dt} \\ &= -2L \frac{d^2 u}{d\theta^2} \cdot \dot{\theta} \\ &= -2L \frac{d^2 u}{d\theta^2} \cdot 2L u^2 \\ &= -4L u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} \rightarrow ① \text{ 代入} \end{aligned}$$

$$-4L^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} - \frac{1}{u} \cdot (2Lu^2)^2 = -GM u^2$$

$$u - \frac{MG}{4L^2} = A \cos \theta + B \sin \theta$$

$$4L^2 \cancel{u^2} \frac{d^2 u}{d\theta^2} + 4L^2 u^{\cancel{2}} = GM \cancel{u^2}$$

簡単のため初期条件 $u(0) = B = 0$ とする。

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -u + \frac{MG}{4L^2}$$

$$\frac{1}{r} - \frac{MG}{4L^2} = A \cos \theta$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(u - \frac{MG}{4L^2} \right) = - \left(u - \frac{MG}{4L^2} \right)$$

単振動の式

↑
 $\omega = 1$

$$\frac{1}{r} = A \cos \theta + \frac{MG}{4L^2}$$

$$r = \frac{1}{A \cos \theta + \frac{MG}{4L^2}}$$

2次曲線の
極座標表示、

$$r = \frac{ea}{1 + e \cos \theta}$$

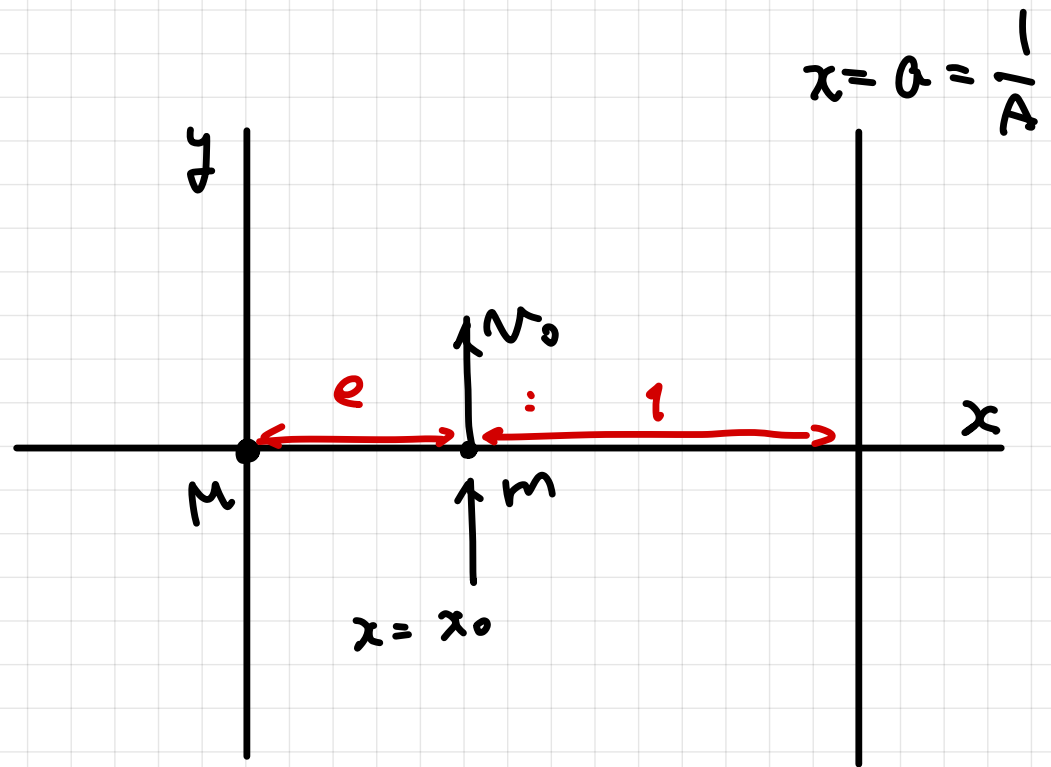
↓

$$r = \frac{\frac{4L^2}{MG}}{1 + \frac{4L^2}{MG} A \cos \theta}$$

$e = \frac{4L^2 A}{MG}$ (離心率), $a = \frac{1}{A}$

$t=0$ 時, $\theta=0$, $r=x_0$, 速度 v_0

$$\begin{aligned} 4L^2 &= (2L)^2 = (r^2 \dot{\theta})^2 \\ &= r^2 \cdot (\dot{r} \dot{\theta})^2 \\ &= x_0^2 \cdot v_0^2 \end{aligned}$$



總的機械能

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GMm}{x_0} \\ &= \frac{1}{2} m \cdot \frac{4L^2}{x_0^2} - \frac{GMm}{x_0} \\ &= \frac{m}{x_0} \left(\frac{2L^2}{x_0} - GM \right) \end{aligned}$$

$$x_0 : \frac{1}{A} = e : e+1$$

$$(e+1)x_0 = \frac{e}{A}$$

$$x_0 = \frac{e}{A(e+1)} = \frac{4L^2}{mG} \cdot \frac{1}{e+1}$$

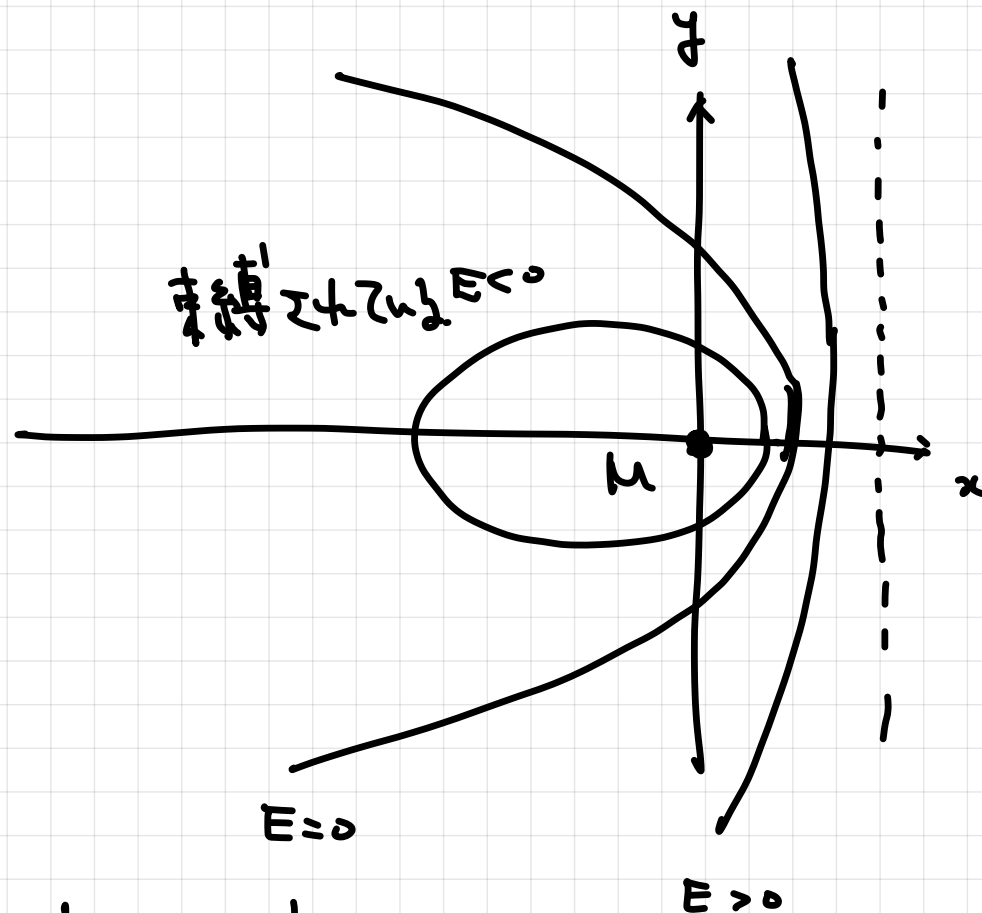
$$E = \frac{mM^2G^2(e+1)}{4L^2} \left(\frac{mG(e+1) \cdot \cancel{4L^2}^2}{2 \cdot \cancel{4L^2}} - mG \right)$$

$$= \underbrace{\frac{mM^2G^2(e+1)}{4L^2}}_{>0} \cdot \underbrace{\frac{e-1}{2}}_{>0}$$

$e > 1 \rightarrow E > 0$ 双曲线

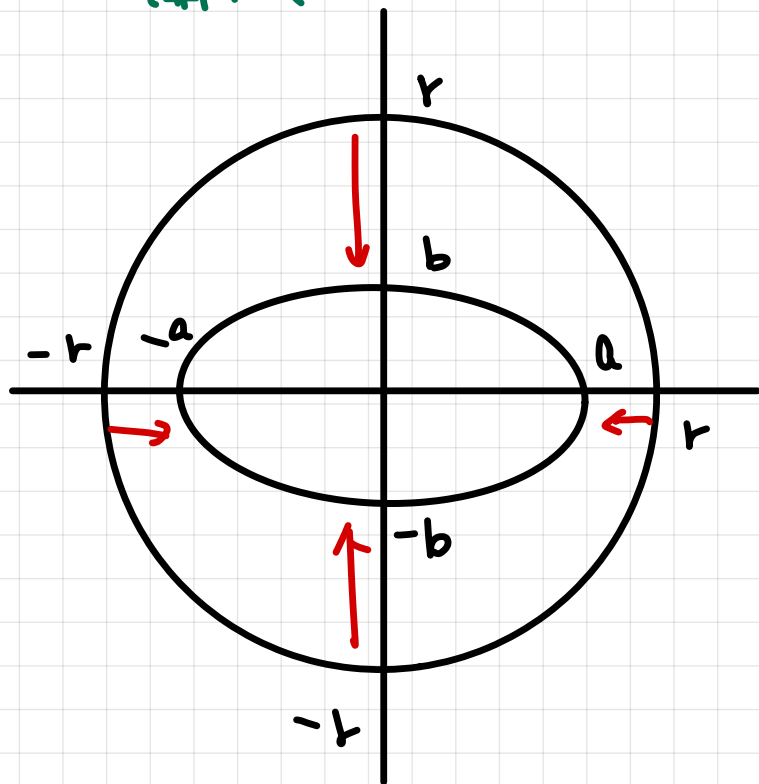
$e = 1 \Rightarrow E = 0$ 抛物线

$0 < e < 1 \Rightarrow E < 0$ 椭圆.



無限遠に到達可能.

円、面積



円、面積 πr^2

円、面積 $\pi r^2 \times \frac{a}{r} \times \frac{b}{r}$

$$= \pi ab$$

$\pi \times \text{長半径} \times \text{短半径}$

円 : $x^2 + y^2 = r^2$

円 : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

7.7- 第3法則

$$r = \frac{ea}{e \cos \theta + 1}$$

$0 < e < 1$ 椭圆軌道

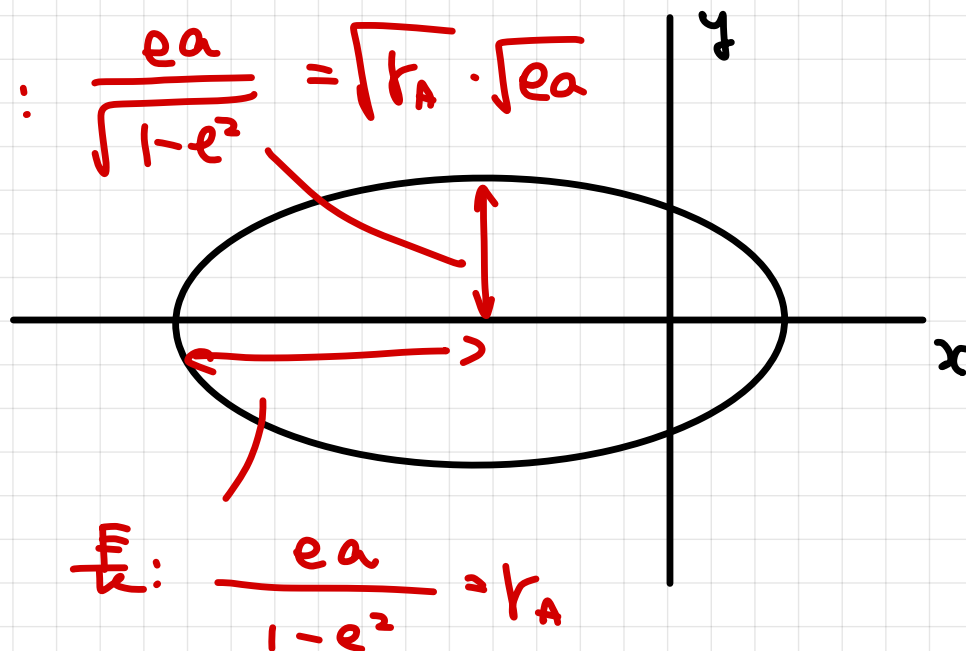
$$\Rightarrow r + e \frac{r \cos \theta}{x} = ea$$

$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

↓ 省略

$$\frac{\left(x + \frac{e^2 a}{1-e^2}\right)^2}{\left(\frac{ea}{1-e^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{ea}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2} = 1$$

$$\text{短: } \frac{ea}{\sqrt{1-e^2}} = \sqrt{r_A} \cdot \sqrt{ea}$$



$$\text{長: } \frac{ea}{1-e^2} = r_A$$

椭圆面積

$$\begin{aligned} & \pi \cdot r_A \cdot \sqrt{r_A} \cdot \sqrt{ea} \\ &= \pi \sqrt{ea} \cdot r_A^{3/2} \end{aligned}$$

面積速度：一定

$$\Rightarrow v_s$$

$$T = \frac{\pi \sqrt{ea} \cdot r_A^{3/2}}{v_s}$$

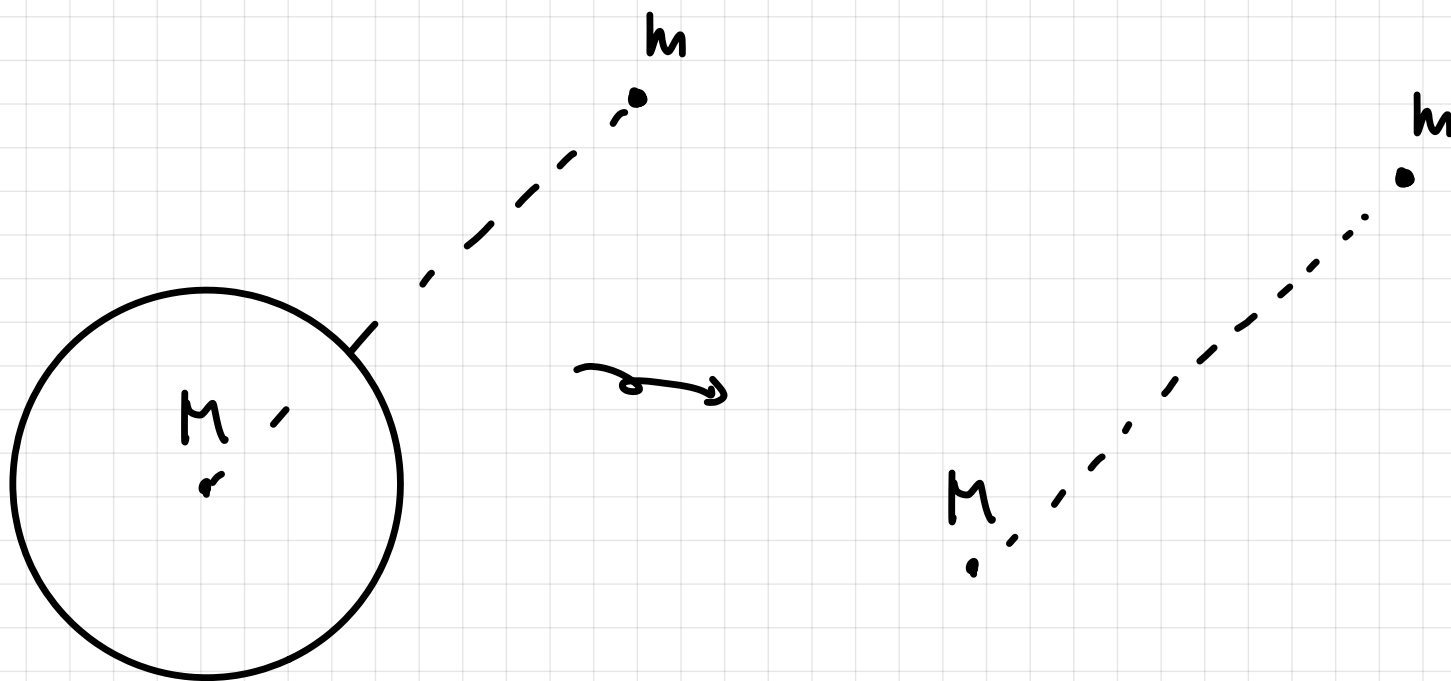
$$\Rightarrow \frac{T}{r_n^{3/2}} = \text{定数}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{T^2}{r_A^3} = \text{一定}$$

77°j- 第3法則.

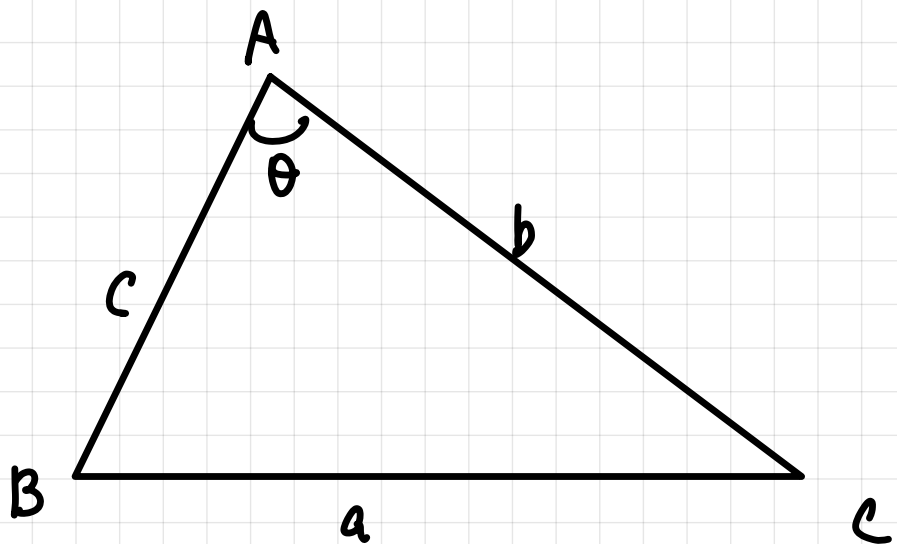
< 目標 10 >



* 万有引力の性質

「力の法則」は関連 → 電磁気学の基本法則

余弦定理



$$\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$$

$$|\vec{BC}|^2 = |\vec{AC} - \vec{AB}|^2$$

$$= |\vec{AC}|^2 - 2\vec{AC} \cdot \vec{AB} + |\vec{AB}|^2$$

余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \theta$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ 时 } \quad \text{「毕达哥拉斯定理」, 勾股定理}$$

< 演習 >

$$\angle B = \phi \text{ 时 } \cos \phi = ?$$

$$\Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \phi$$

$$2ac \cos \phi = a^2 + c^2 - b^2$$

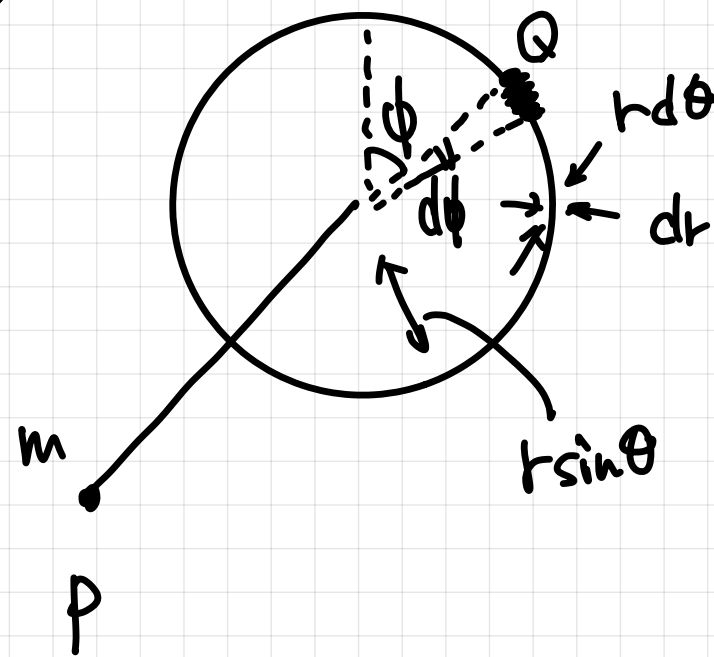
$$\cos \phi = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

球対称、質量分布、物質、万有引力

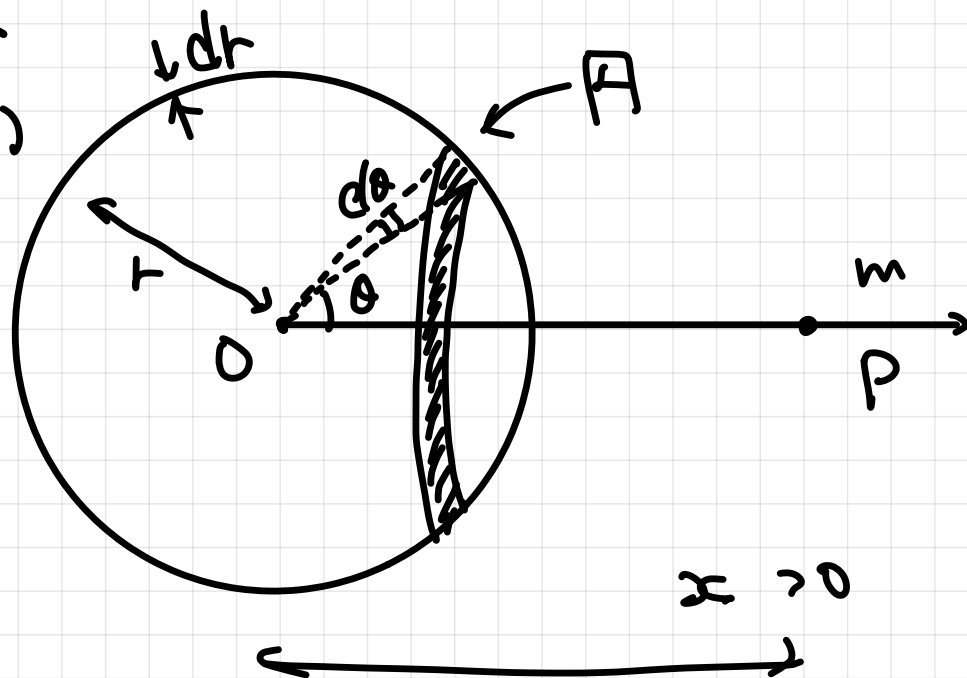
★ 万有引力

物理で積分を持ちこむとき、常套手段

- ① 微小部分に区切る
- ② " を点と考える
- ③ " の効果を足し合わせる (積分する)



球殻
密度 $\rho(r)$

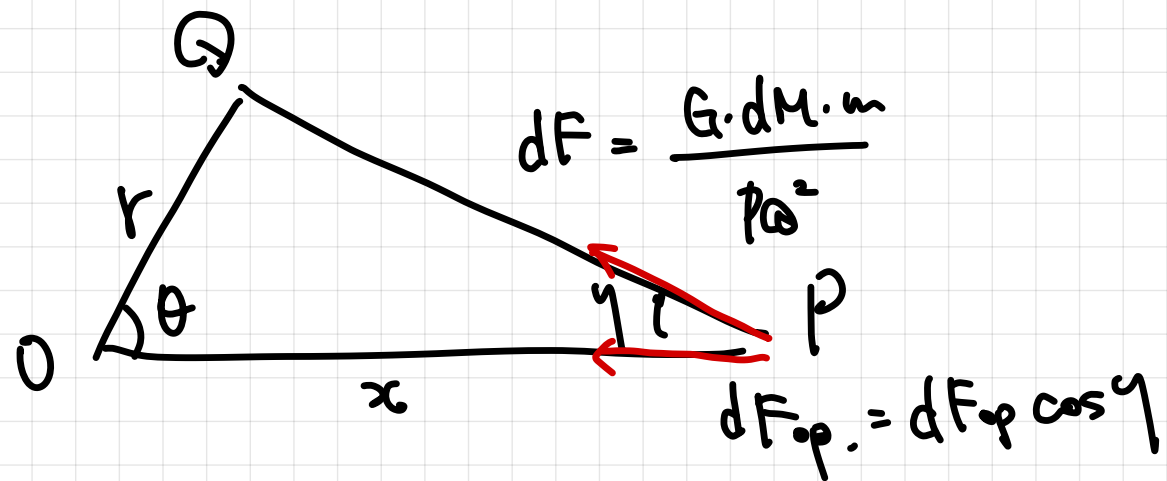


Q 付近の微小部分の質量

$$dM = (r \sin \theta \cdot d\phi) \times r d\theta \times dr \times \rho(r)$$

受ける万有引力の大きさ

$$\frac{G \cdot dM \cdot m}{PQ^2}$$



$$PQ^2 = x^2 + r^2 - 2xr \cos \theta$$

$$dF_{op} = \frac{m G \cdot \rho(r) r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi}{x^2 + r^2 - 2xr \cos \theta} \cdot \cos \gamma$$

↑↑↑↑↑.

$$r \cos \theta + PQ \cos \gamma = x$$

$$\cos \gamma = \frac{x - r \cos \theta}{PQ}$$



$$\frac{dF_{op}}{mG} = \frac{\rho(r) r^2 \sin \theta (x - r \cos \theta)}{(x^2 + r^2 - 2xr \cos \theta)^{3/2}} dr d\theta d\phi$$

$\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$

$$r \cos \theta = t \quad \begin{cases} \theta: 0 \rightarrow \pi \\ t: r \rightarrow -r \end{cases}$$

$$\frac{dt}{d\theta} = -r \sin \theta \Rightarrow d\theta = -\frac{dt}{r \sin \theta}$$

$$\int_0^\pi \frac{r^2 \sin \theta (x - r \cos \theta) d\theta}{(x^2 + r^2 - 2xr \cos \theta)^{3/2}} = \int_r^{-r} \frac{r^2 \sin \theta (x - t)}{(x^2 + r^2 - 2xt)^{3/2}} \left(-\frac{dt}{r \sin \theta} \right)$$

$$= r \int_{-r}^r \frac{x-t}{(x^2+r^2-2xt)^{3/2}} dt$$

$$x-t = \frac{2x^2 - 2xt}{2x}$$

$$= \frac{1}{2x} \{ (x^2+r^2-2xt) - (t^2-x^2) \}$$

$$= \frac{r}{2x} \int_{-r}^r \frac{(x^2+r^2-2xt) - (t^2-x^2)}{(x^2+r^2-2xt)^{3/2}} dt$$

$$= \frac{r}{2x} \int_{-r}^r \frac{dt}{(x^2+r^2-2xt)^{1/2}} - \frac{r}{2x} \int_{-r}^r \frac{t^2-x^2}{(x^2+r^2-2xt)^{3/2}} dt$$

$$\left[\begin{array}{l} * \frac{d}{dt} \left(- \frac{(x^2+r^2-2xt)^{1/2}}{x} \right) \\ = \frac{1}{(x^2+r^2-2xt)^{1/2}} \end{array} \right]$$

&

$$\left[\begin{array}{l} * \frac{d}{dt} \frac{t^2-x^2}{x(x^2+r^2-2xt)^{1/2}} \\ = \frac{t^2-x^2}{(x^2+r^2-2xt)^{3/2}} \end{array} \right]$$

↪

$$= \frac{r}{2x} \left[- \frac{(x^2 + r^2 - 2xt)^{1/2}}{x} - \frac{r^2 - x^2}{x(x^2 + r^2 - 2xt)^{1/2}} \right]_r^{-r}$$

$$(x^2 + r^2 - 2xt)^{1/2} = |x - t|$$

$$(x^2 + r^2 + 2xt)^{1/2} = |x + r|$$



$$\begin{aligned} * \quad (4)^{1/2} &= 2 = |\pm 2| \\ \text{"} \quad ((\pm 2)^2)^{1/2} \end{aligned}$$

$$= \frac{r}{2x} \cdot \left\{ - \frac{|x-t|}{x} + \frac{|x+r|}{x} - \frac{r^2 - x^2}{x} \left(\frac{1}{|x-t|} - \frac{1}{|x+r|} \right) \right\} \quad (x^2)^{1/2} = |x|$$

$x < r$ のとき.

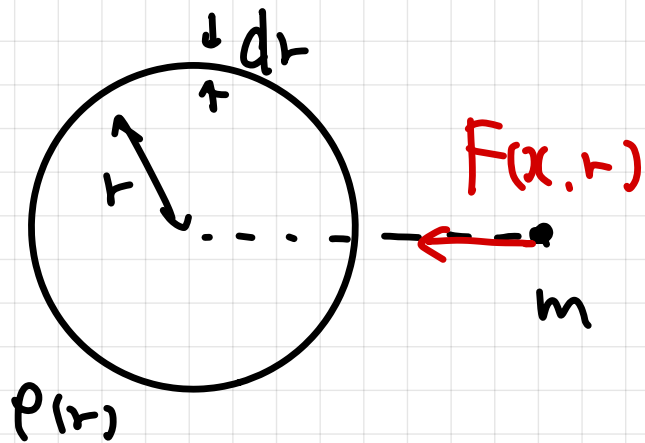
$$\begin{aligned} &= \frac{r}{2x} \left\{ \frac{x-r}{x} + \frac{x+r}{x} + \frac{x^2-r^2}{x} \left(-\frac{1}{x-r} - \frac{1}{x+r} \right) \right\} \\ &= \frac{r}{2x} \left(\frac{x-r}{x} + \frac{x+r}{x} - \frac{x+r}{x} - \frac{x-r}{x} \right) = 0 \end{aligned}$$

$x > r$ のとき

$$\begin{aligned} &= \frac{r}{2x} \left\{ -\frac{x-r}{x} + \frac{x+r}{x} + \frac{x^2-r^2}{x} \left(\frac{1}{x-r} + \frac{1}{x+r} \right) \right\} \\ &= \frac{r}{2x} \left(-\frac{x-r}{x} + \frac{x+r}{x} + \frac{x+r}{x} - \frac{x-r}{x} \right) \\ &= \frac{r}{2x} \frac{4r}{x} = \frac{2r^2}{x^2} \end{aligned}$$

$$\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{dF_{\phi}}{mG} = \begin{cases} \rho(r) \cdot 2\pi \cdot \frac{2r^2}{x^2} dr & (x > r) \\ 0 & (x < r) \end{cases}$$

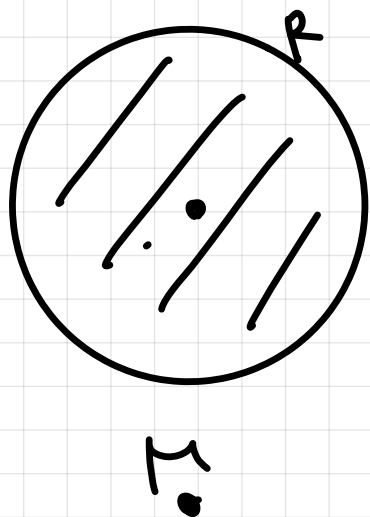
球殻の重力



$$F(x, r) = \begin{cases} \rho(r) 4\pi r^2 dr \cdot \frac{mG}{x^2} & \text{外側} \quad (x > r) \\ 0 & (x < r) \quad \text{内側} \end{cases}$$

m の内側部分のみ

球殻は等しい球に等しい

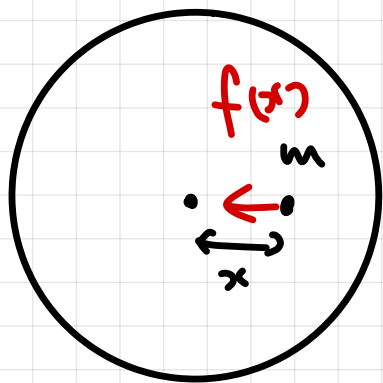


$f(x)$
 $\leftarrow$
 x
 m
 x

$\Rightarrow$

$$f(x) = \int_0^R \underbrace{\rho(r) 4\pi r^2 dr}_M \cdot \frac{mG}{x^2}$$

$$= \frac{G M m}{x^2}$$



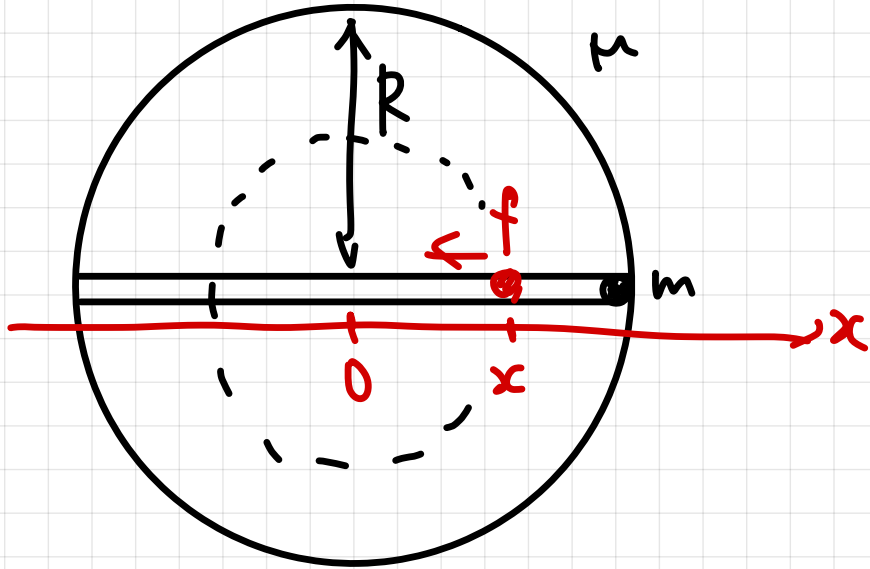
$\Rightarrow$

$$f(x) = \int_0^x \underbrace{\rho(r) 4\pi r^2 dr}_{\text{self-contained mass}} \cdot \frac{mG}{x^2}$$

自包含的內質，質量。

< 演習 >

惑星の運動



$$m a = - \frac{G m}{x^2} \cdot M \cdot \frac{x^3}{R^3}$$

$$= - m \frac{MG}{R^3} x$$

$$\ddot{x} = - \frac{MG}{R^3} x$$

$\sim \omega^2 x$

単振動.

$$\begin{cases} x = A \cos \omega t + B \sin \omega t \\ \dot{x} = -A \omega \sin \omega t + B \omega \cos \omega t \end{cases}$$

$$x(0) = A = R.$$

$$\dot{x}(0) = B \omega = 0 \quad B = 0.$$

$$x(t) = R \cos \sqrt{\frac{MG}{R^3}} t$$

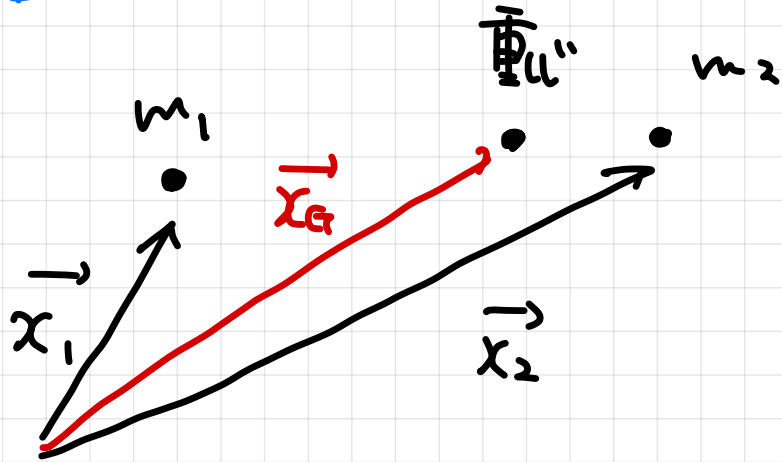
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{MG}}$$

< 目標 11 >

剛体の 9 つの条件

* 本講は回転まで扱ったばかりだから
→ 次は

$\vec{r}_{CM}$



$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2 + m_3 \vec{x}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$\downarrow$ nützige

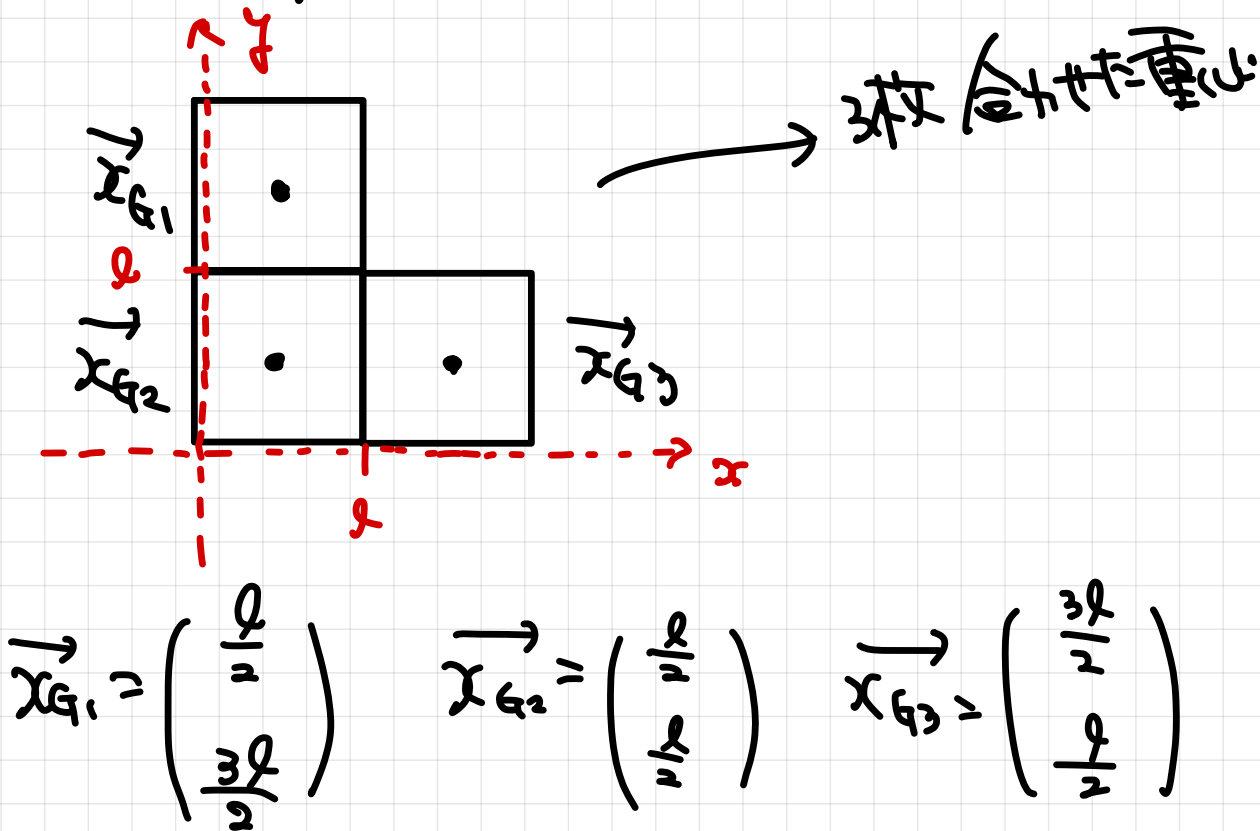
$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2 + \dots + m_n \vec{x}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$



剛体 : 運動の間、形を変えない。
 変形するもの
 ばね、液、気体...
 ある種の近似。

↑
 質点の集まりと考へて、重心を考へる。

対称性があるものは重心は対称性にあてはまる。



$$\vec{x}_G = \frac{m \vec{x}_{G1} + m \vec{x}_{G2} + m \vec{x}_{G3}}{m + m + m}$$

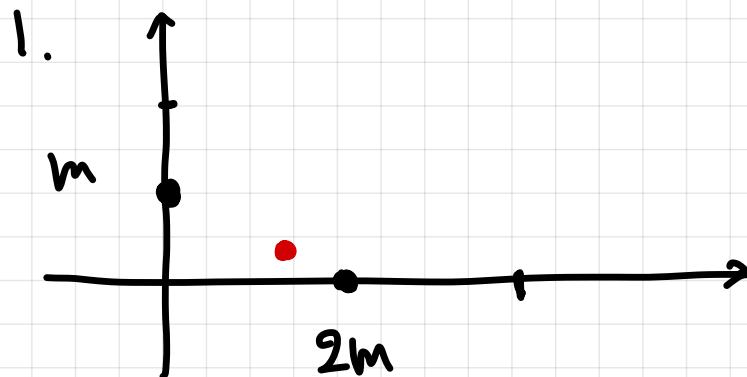
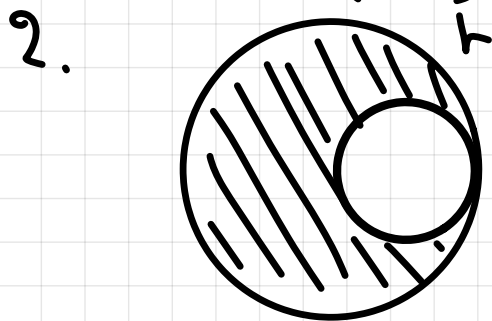
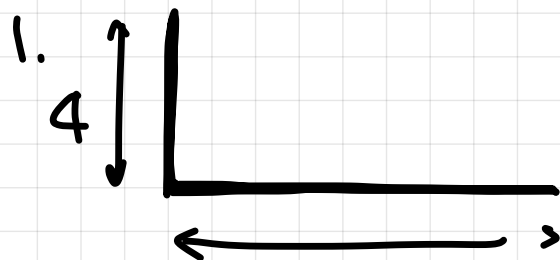
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \left(\frac{l}{2} + \frac{l}{2} + \frac{3l}{2} \right) \\ \frac{1}{3} \left(\frac{3l}{2} + \frac{l}{2} + \frac{l}{2} \right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5l}{6} \\ \frac{5l}{6} \end{pmatrix}$$

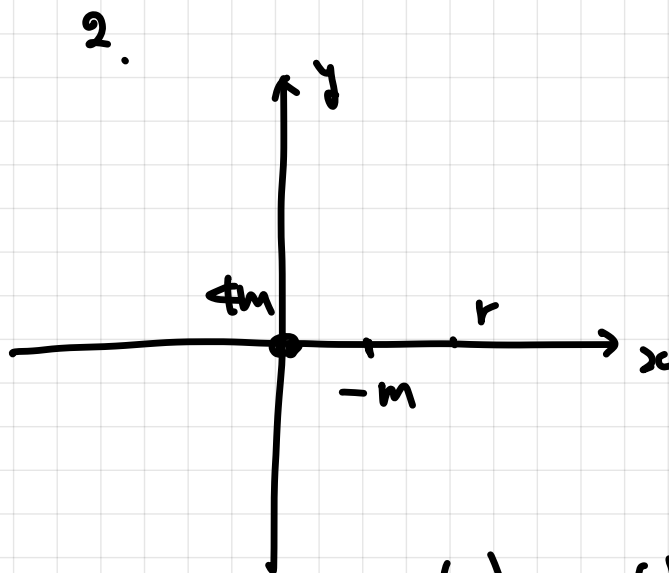
$$\vec{r}_{CG} = \frac{4m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} 3l/2 \\ 3l/2 \end{pmatrix}}{4m - m}$$

$$= \begin{pmatrix} 5l/6 \\ 5l/6 \end{pmatrix}$$

< 演習 >



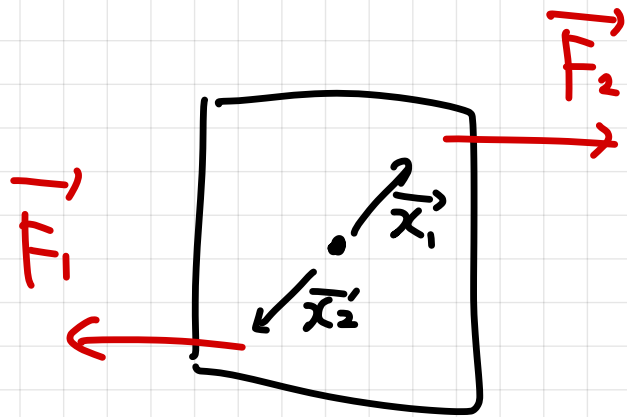
$$\vec{r}_G = \frac{m \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2m \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}}{3m} = \begin{pmatrix} 8/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$



$$\vec{r}_G = \frac{4m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} r/2 \\ 0 \end{pmatrix}}{3m} = \begin{pmatrix} -r/6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

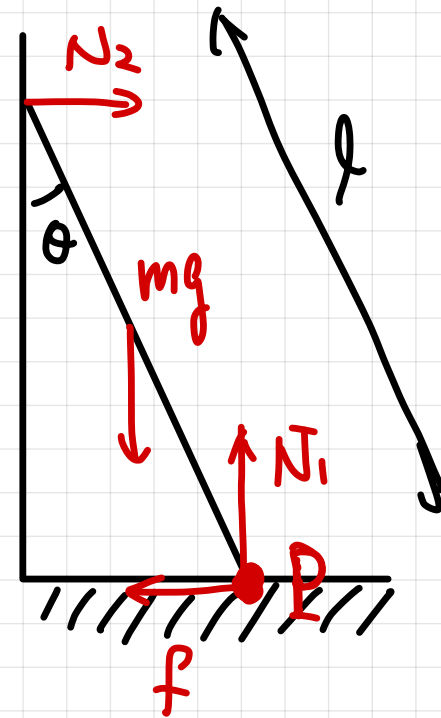
剛体二つの場合

- 二つの場合の条件
1. $\vec{F} = \vec{0}$
 2. $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$



1. $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$ o.k.

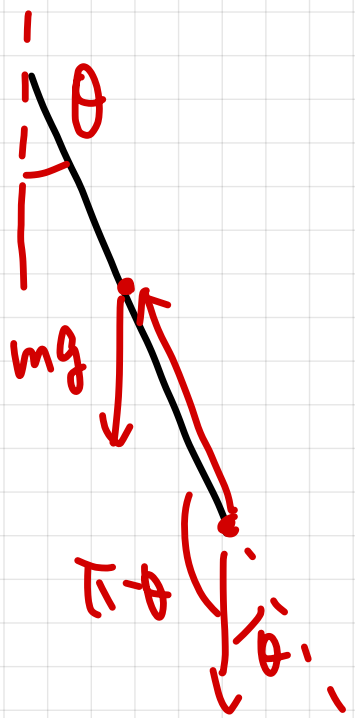
2. $\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \neq \vec{0}$
回転する。



θ が大きくなると滑り始める。

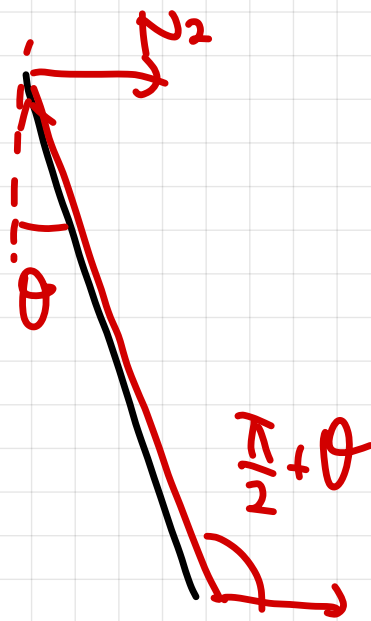
1.
$$\begin{cases} mg = N_1 \\ f = N_2 \end{cases}$$

2. P は回転軸にトルクを釣り合わせる。



$$\frac{l}{2} \cdot mg \sin(\pi - \theta)$$

$$= \frac{l}{2} mg \sin \theta$$



$$-l \cdot N_2 \cdot \sin\left(\frac{l}{2} + \theta\right)$$

$$\sin \frac{\pi}{2} \cos \theta + \cos \frac{\pi}{2} \sin \theta$$

$$= \cos \theta$$

$$-l \cdot N_2 \cos \theta$$

$$\frac{l}{2} mg \sin \theta - l N_2 \cos \theta = 0$$

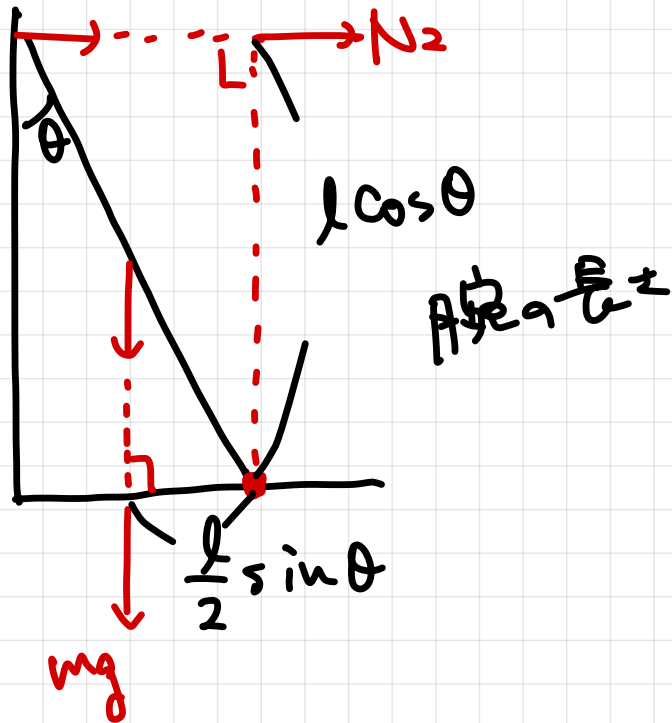
$$\frac{mg}{2} \sin \theta = N_2 \cos \theta$$

$$N_2 = \frac{mg}{2} \tan \theta$$

$$f = \frac{mg}{2} \tan \theta \leq \mu N_1 = \mu mg$$

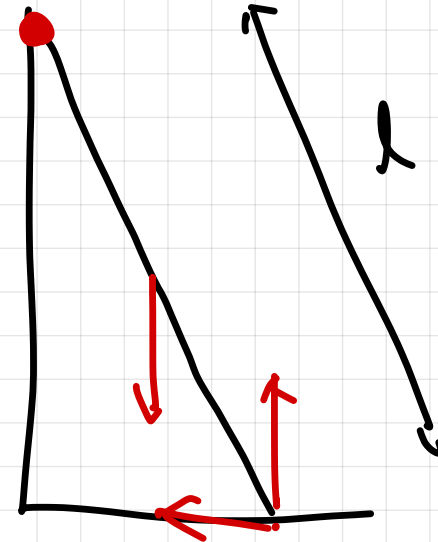
$$\tan \theta \leq 2\mu$$

実用上は 腕の長さ $\times$ 重力と
 回転の方向



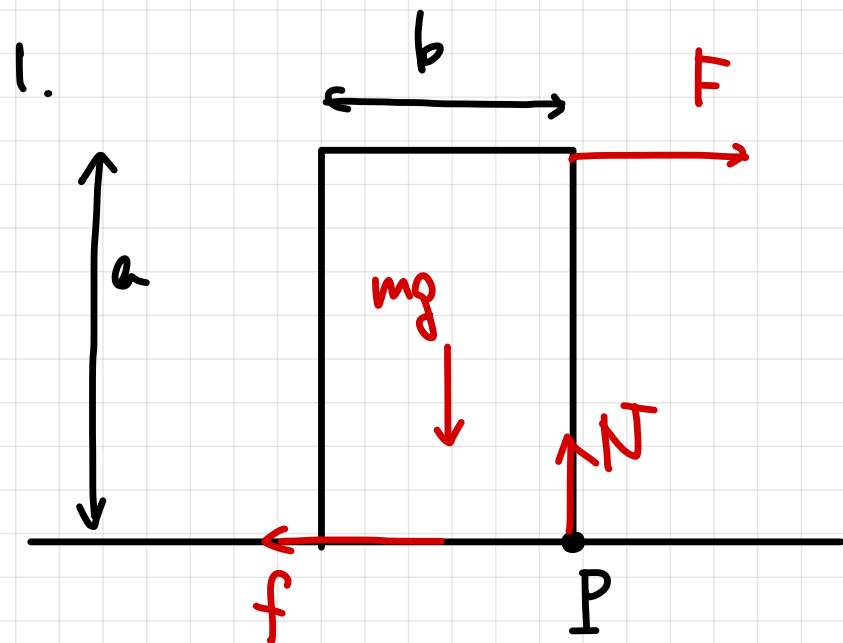
$$N = l \cos \theta = mg \frac{l}{2} \sin \theta$$

ただし、回転 (2nd order) がある。
 $\epsilon'' = \tau$ 軸 = 取, τ も問題な。



3つ 考えが必要がある。

<演習>



F が大きくなりすぎると、右へ倒れる前に傾き始める。
 μa 条件は?

静止条件

$$F = f$$

$$mg = N$$

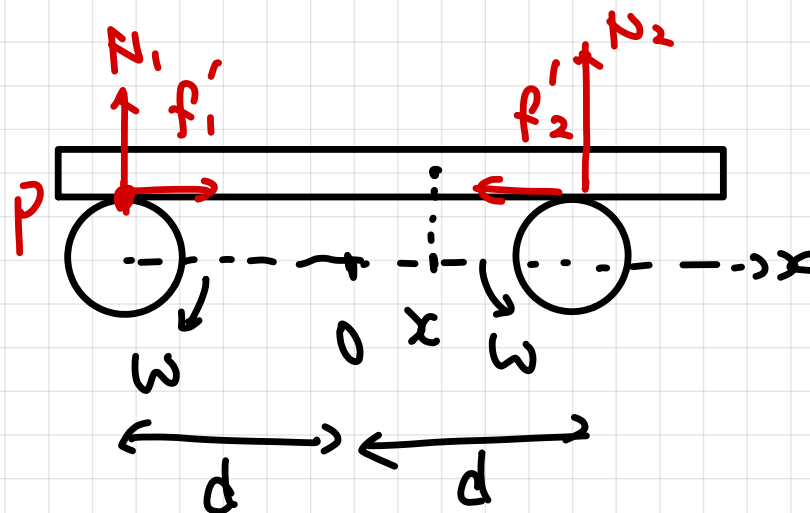
$$aF = \frac{b}{2} mg$$

$$F = \frac{b \cancel{mg}}{2a} = f \leq \mu N = \mu \cancel{mg}$$

$$\mu \geq \frac{b}{2a}$$

2.

高速回転する円柱の上に板の運動



左右方向には重くした。上下方向には重くした。 & 回転もした。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{左右} \quad m \ddot{x} = f_1'(x) - f_2'(x) \\ \quad \quad \quad = \mu' N_1(x) - \mu' N_2(x) \\ \text{上下} \quad N_1(x) + N_2(x) = mg \\ \text{回転} \quad (d+x)mg = 2d N_2(x) \end{array} \right.$$

$$N_2(x) = mg \frac{d+x}{2d}$$

$$N_1(x) = mg - N_2 = mg \frac{2d - d - x}{2d} = mg \frac{d - x}{2d}$$

$$F_{\ddot{x}} = \mu' mg \frac{d-x}{2d} - \mu' mg \frac{d+x}{2d}$$

$$\omega^2 = \frac{k'g}{a}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{d}{\mu g}}$$

單振動。

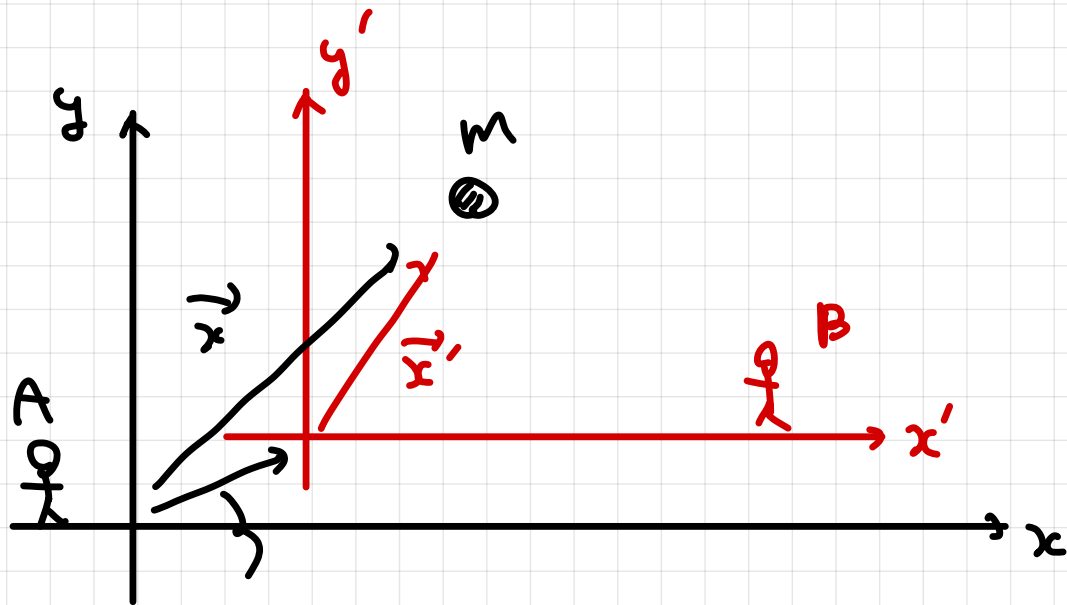
< 目標 12 >

2 体 問題 各種

* 大学受験の鉄板.

偏差値の高い大学では 出題率 50%.

慣性力



A 2hpi" ma 運動 Σ 見3 Σ 決.

$$\vec{F} = m \ddot{x} = m \ddot{z}$$

B 2hpi Σ 見3 Σ .

$$\vec{F}' = m \ddot{x}' = m \ddot{a}'$$

$\vec{F} = \vec{F}'$ 1hpi 同い Σ 決3 Σ 決3 Σ 決3

$$\vec{x} = \vec{x}' + \vec{x}''$$

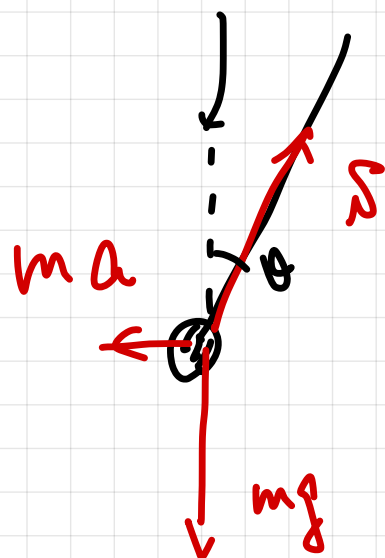
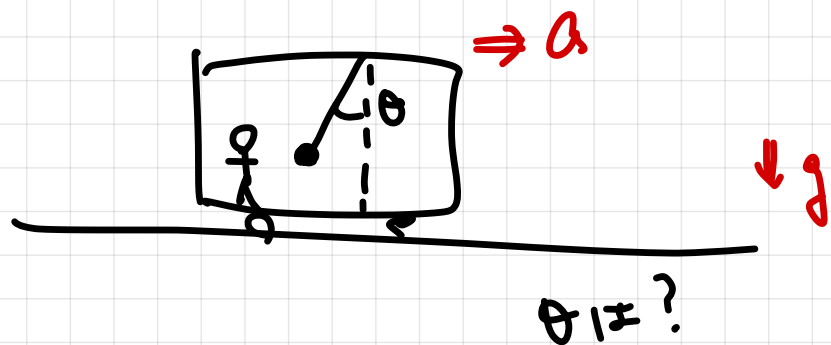
$$\Rightarrow \vec{x}'' = \vec{x}' - \vec{x}$$

$$\ddot{x}'' = \ddot{x}' - \ddot{x}$$

$$\vec{F}' = m \ddot{x}' = m \ddot{x}'' + m \ddot{x}$$

$$= \vec{F} - m \ddot{x}$$

慣性力



$$\begin{aligned} \sum \sin \theta &= ma \quad \leftarrow \text{1/2} \\ \sum \cos \theta &= mg \end{aligned}$$

$$\frac{T \sin \theta}{T \cos \theta} = \frac{ma}{mg}$$

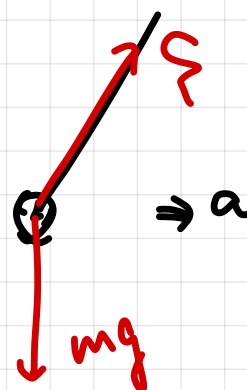
"

$$\tan \theta$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{a}{g}$$

外から見れば.

運動方程式

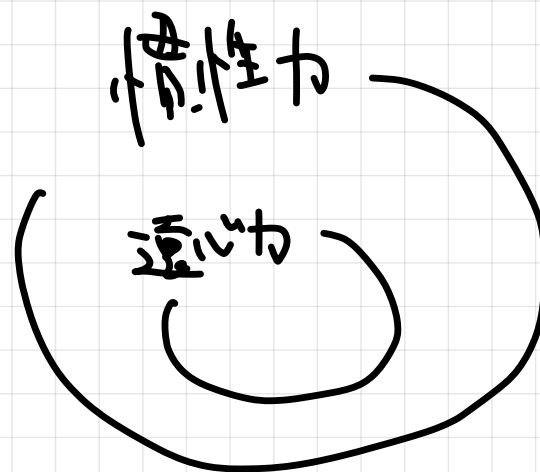
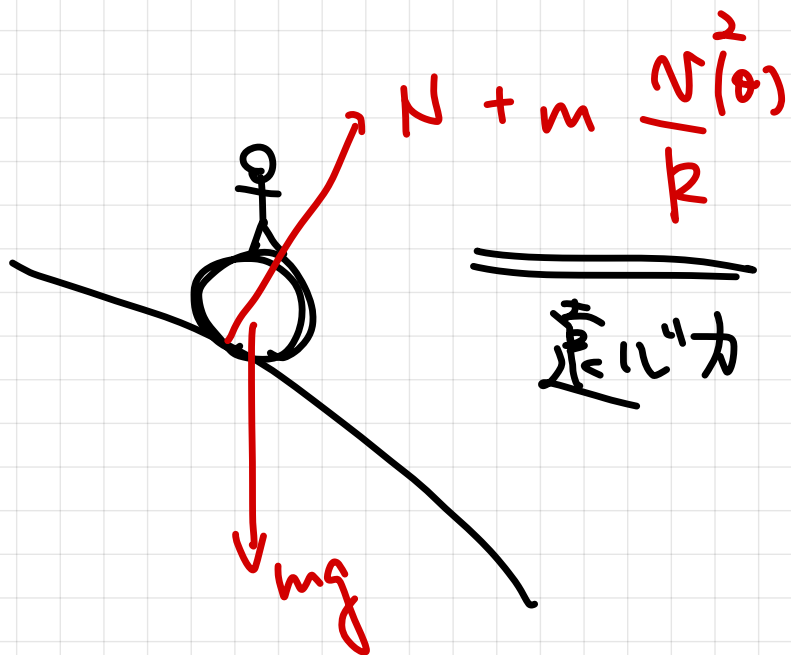
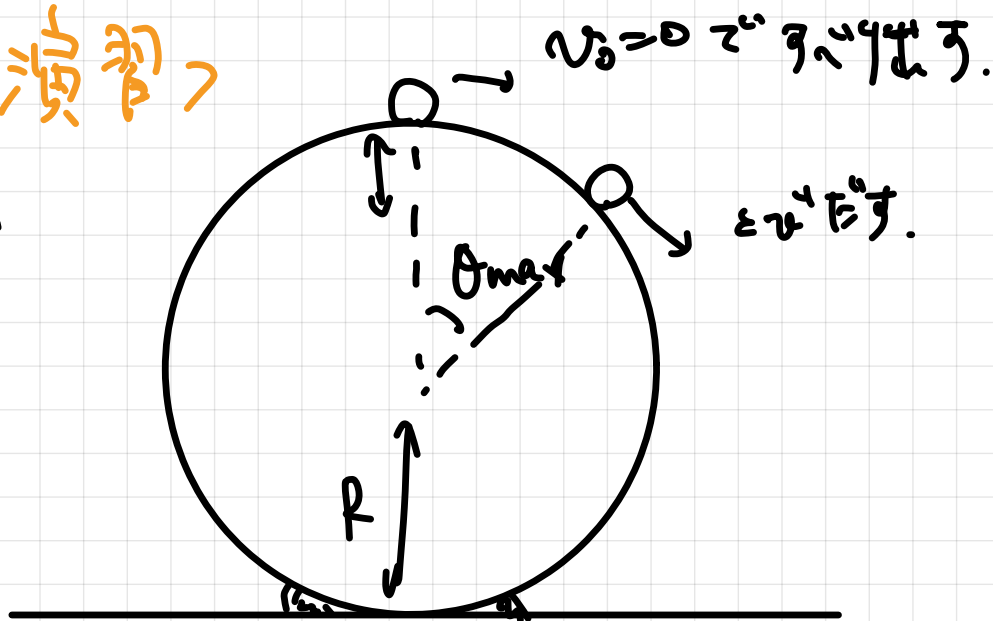


$$\begin{aligned} \sum \sin \theta &= ma \\ \sum \cos \theta &= mg \end{aligned}$$

都合、これだけ見ていい.

<演習>

1.



$$\frac{1}{2} m v^2(\theta) = m g R (1 - \cos \theta)$$

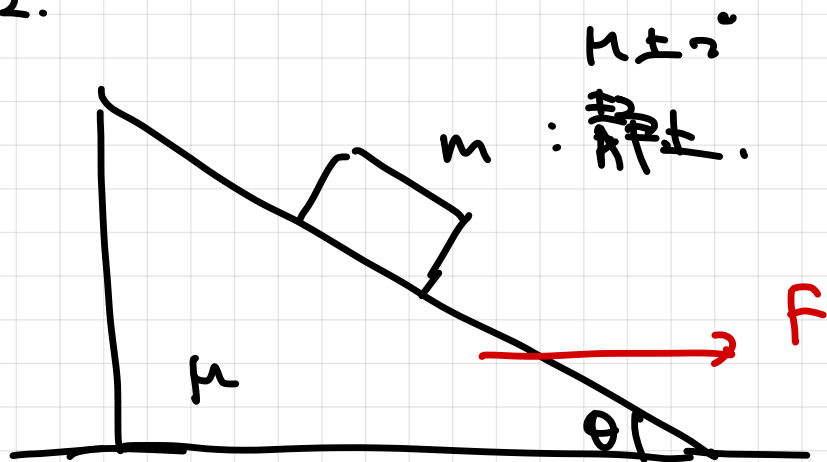
$$v^2(\theta) = 2 g R (1 - \cos \theta)$$

$$N + \frac{m}{R} \cdot 2 g R (1 - \cos \theta) = m g \cos \theta$$

$$N = m g (3 \cos \theta - 2)$$

$$N = 0 \text{ となる } \cos \theta = \frac{2}{3} \text{ となる.}$$

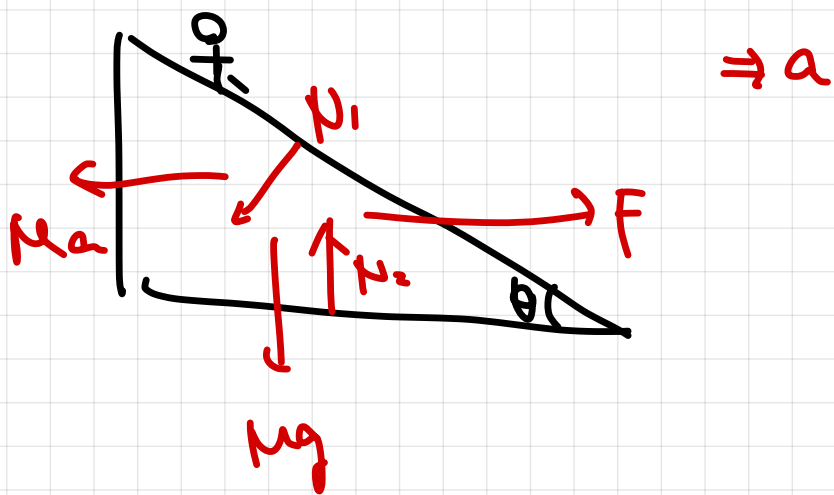
2.



$$\begin{cases} F = Ma + N_1 \sin \theta & (1) \\ N_2 = Mg + N_1 \cos \theta & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1 \sin \theta = ma & (3) \\ mg = N_1 \cos \theta & (4) \end{cases}$$

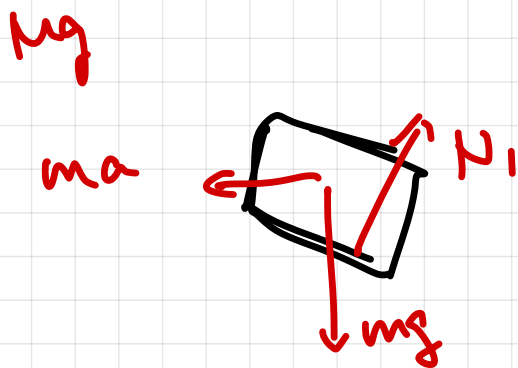
$\mu \leq 0?$



(3) $\rightarrow$ (1)

$$F = Ma + ma = (M+m)a$$

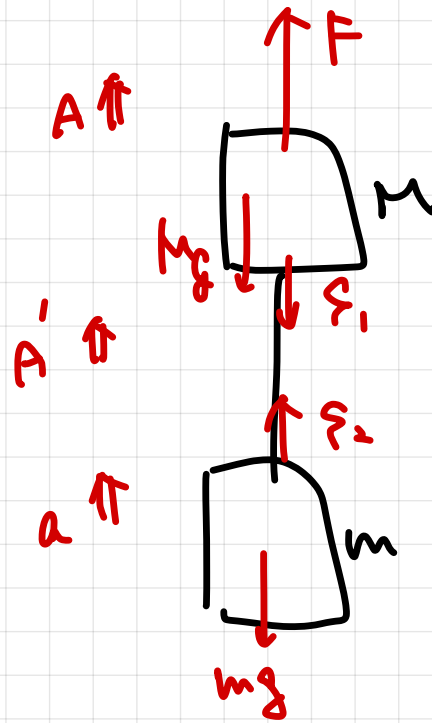
$$a = \frac{F}{M+m}$$



束縛条件

独立に運動する物体と
拘束数に於いて式を立てる。

↑
束縛条件が必要



$$① MA = F - Mg - S_1$$

$$② 0 \cdot A' = S_2 - S_1$$

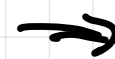
$$③ ma = S_2 - mg$$

$$S_1 = S_2 \text{ かつ } S_1 = S_2$$

$$\begin{cases} MA = F - Mg - S \\ ma = S - mg \end{cases}$$

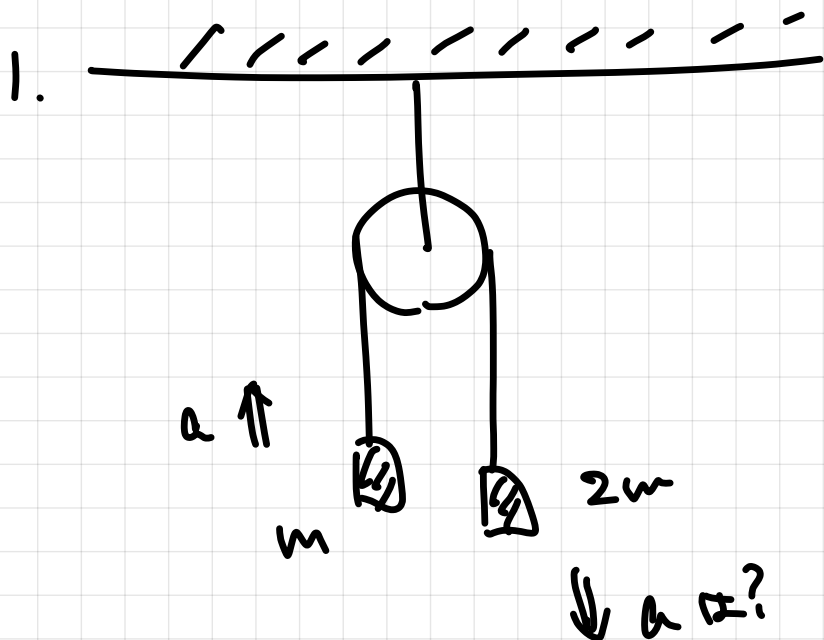
拘束数. A, a, S 解ける。

糸の伸びを ΔL とする



$$A = A' = a$$

<演習>



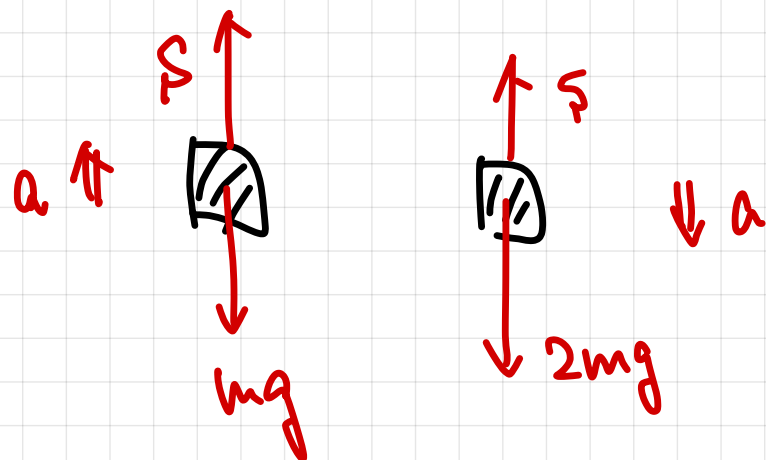
$$m a = T - m g$$

$$2m a = 2m g - T$$

+) _____

$$3m a = m g$$

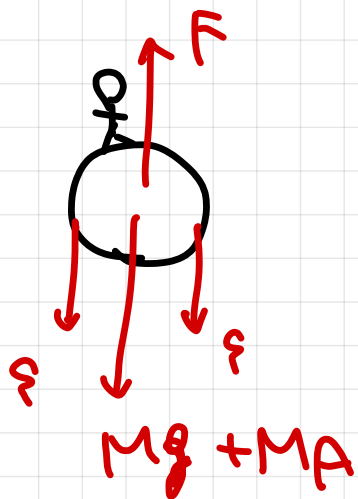
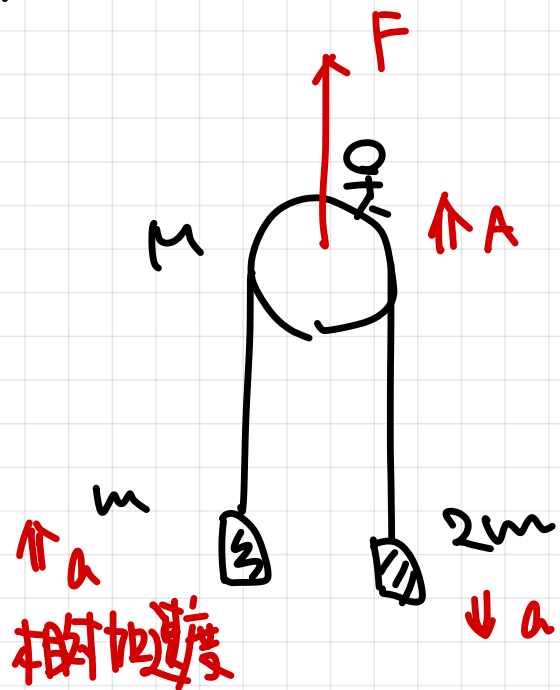
$$a = \frac{g}{3}$$



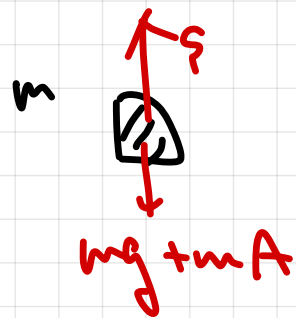
$\varepsilon'' \leq \varepsilon \leq Q$

α' 条件.

2.

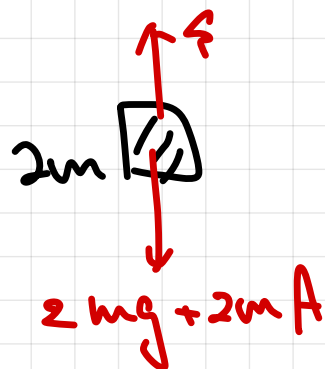


$$\textcircled{1} F = Mg + MA + 2S$$



$$\textcircled{2} ma = S - mg - mA$$

$$\textcircled{3} 2ma = 2mg + 2mA - S$$



a, A, S 三个未知数.

$$\textcircled{3} 2ma = 2mg + 2mA - S$$

$$\textcircled{2} \times 2$$

$$2ma = 2S - 2mg - 2mA$$

$$0 = -3S + 4mg + 4mA$$

$$\sum = \frac{4}{3} mg + \frac{4}{3} m A$$

$$F = Mg + MA + \frac{2}{3} mg + \frac{2}{3} m A$$

$$\left(\frac{2}{3}m + M\right)A = F - \left(M + \frac{2}{3}m\right)g$$

$$A = \frac{F}{\frac{2}{3}m + M} - g$$

②+③

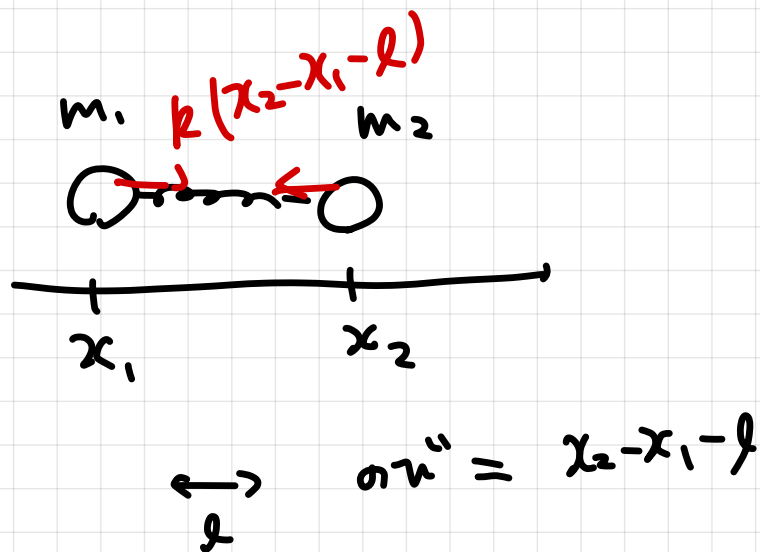
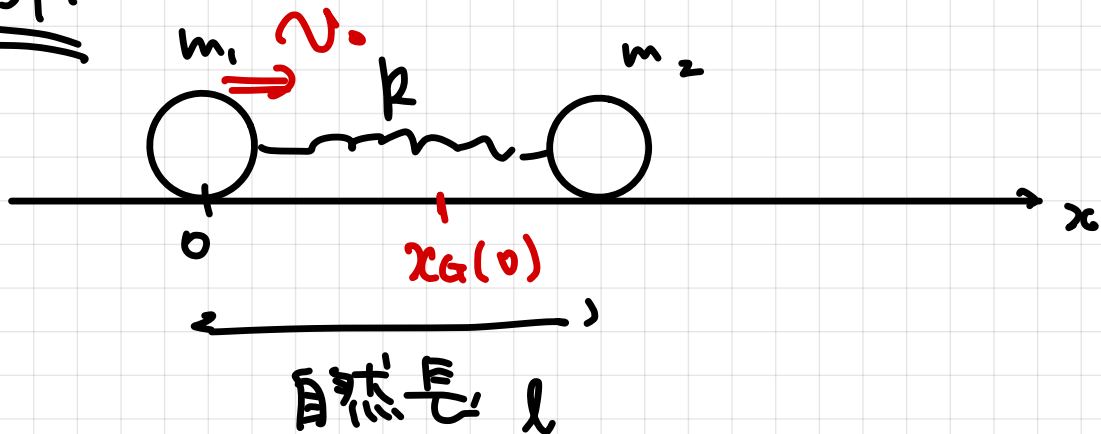
$$3\cancel{m}a = \cancel{m}g + \cancel{m}A$$

$$3a = g + \frac{F}{\frac{2}{3}m + M} - g$$

$$a = \frac{F}{\frac{2}{3}m + M}$$

重心運動 + 相対運動

例1



$$\begin{cases} m_1 a_1 = k(x_2 - x_1 - l) & \textcircled{1} \\ m_2 a_2 = -k(x_2 - x_1 - l) & \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$

$$\frac{m_1 a_1 + m_2 a_2 = 0}{m_1 + m_2}$$

$$x_G = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_G &= \frac{m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2}{m_1 + m_2} \\ v_G & \end{aligned}$$

$$a_G = 0$$

$$V_G = \text{定数}$$

$$= V_G(0)$$

$$= \frac{m_1 V_0 + m_2 \cdot 0}{m_1 + m_2}$$

$$V_G(t) = \frac{m_1 V_0}{m_1 + m_2}$$

$$x_G(t) - x_G(0) = \int_0^t v_G(t') dt'$$

$$x_G(t) = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot l}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 V_0}{m_1 + m_2} t$$

$$= \frac{m_2 l + m_1 V_0 t}{m_1 + m_2}$$

$$m_2 l + m_1 v_0 t = m_1 x_1 + m_2 x_2 \quad \textcircled{ア}$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow a_1 = \frac{k}{m_1} (x_2 - x_1 - l) \quad \textcircled{1}'$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow a_2 = -\frac{k}{m_2} (x_2 - x_1 - l) \quad \textcircled{2}'$$

$$\textcircled{2}' - \textcircled{1}'$$

$$a_2 - a_1 = (x_2 - x_1 - l) \left(-\frac{k}{m_2} - \frac{k}{m_1} \right)$$

$$= -k \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} (x_2 - x_1 - l)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} (x_2 - x_1 - l)$$

振動の式

$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$: 換算質量を用いる.

$$\frac{d^2}{dt^2} (x_2 - x_1 - l) = -\frac{k}{\mu} (x_2 - x_1 - l)$$

$= -\omega^2 \text{ とおく.}$

$$\begin{cases} x_2 - x_1 - l = A \cos \omega t + B \sin \omega t \\ \dot{x}_2 - \dot{x}_1 = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t \end{cases}$$

$$x_2(0) - x_1(0) - l = l - 0 - l = 0 = A$$

$$\dot{x}_2(0) - \dot{x}_1(0) = 0 - v_0 = B\omega$$
$$B = -\frac{v_0}{\omega}$$

$$x_2 - x_1 - l = -\frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \quad (1)$$

$$\begin{cases} \textcircled{A} & m_1 x_1 + m_2 x_2 = m_2 l + m_1 v_0 t \\ \textcircled{1} & x_2 - x_1 - l = -\frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \text{より } x_2 = x_1 + l - \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

$$\textcircled{A} \text{に } x_2 \text{ を代入}$$

$$m_1 x_1 + m_2 \left(x_1 + l - \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \right) = m_2 l + m_1 v_0 t$$
$$= m_2 l + m_1 v_0 t$$

$$(m_1 + m_2) x_1 + \cancel{m_2 l} - \frac{m_2 v_0}{\omega} \sin \omega t = \cancel{m_2 l} + m_1 v_0 t$$

$$x_1(t) = \frac{m_1 v_0 t}{m_1 + m_2} + \frac{m_2 v_0}{(m_1 + m_2) \omega} \sin \omega t$$

$$x_2(t) = x_1 + l - \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

$$= l + \frac{m_1 v_0 t}{m_1 + m_2} + \frac{m_2 v_0}{(m_1 + m_2) \omega} \sin \omega t - \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

$$= l + \frac{m_1 v_0 t}{m_1 + m_2} - \frac{m_1 v_0}{(m_1 + m_2) \omega} \sin \omega t$$

等速運動

+

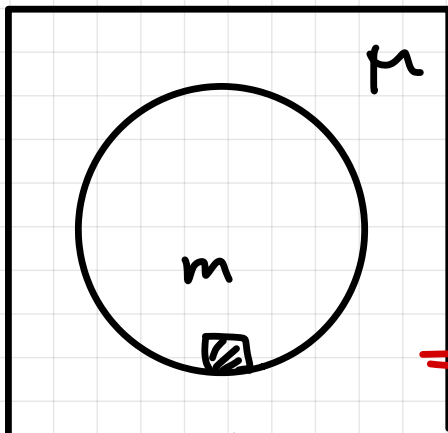
単振動

重心運動

相對運動

$\sqrt{2}$

$t=0$



$\Rightarrow V_0$

x

